関数とは何か

近代数学史からの
アプローチ

岡本　久・長岡亮介　著

近代科学社

◆ 読者の皆さまへ ◆

小社の出版物をご愛読くださいまして，まことに有り難うございます．

おかげさまで，㈱近代科学社は1959年の創立以来，2009年をもって50周年を迎えることができました．これも，ひとえに皆さまの温かいご支援の賜物と存じ，衷心より御礼申し上げます．

この機に小社では，全出版物に対してUD（ユニバーサル・デザイン）を基本コンセプトに掲げ，そのユーザビリティ性の追求を徹底してまいる所存でおります．

本書を通じまして何かお気づきの事柄がございましたら，ぜひ以下の「お問合せ先」までご一報くださいますようお願いいたします．

お問合せ先：reader@kindaikagaku.co.jp

なお，本書の制作には，以下が各プロセスに関与いたしました：

・企画：小山 透
・編集：石井沙知
・組版（LaTeX）・印刷・製本・資材管理：大日本法令印刷
・カバー・表紙デザイン：川崎デザイン
・広報宣伝・営業：冨高琢磨，山口幸治

はじめに

関数概念は，狭くは解析学の，広くは数理的科学全体の中心的な存在といって良い．その重要性を考慮し，学校数学においても初等的なレベルから様々に取り上げられているが，長い歴史を通じて発展してきた関数には様々な“顔”があるため，その歴史的変容の無理解はときに混乱の元にもなる．本書は，関数概念の持つ様々な“顔”の違いとそれぞれの数学的陰影を，歴史を通じて明らかにしようとする試みである．読者は，本書を通じて関数概念とそれを巡る数学の豊かな展開の一端に触れることになるであろう．

とはいえ，本書は，読者が表題から期待するかもしれない単なる「関数概念」についての「数学史」ではない．そもそも，数学史について，「数学の発展に寄与してきたそれぞれの数学者の仕事を歴史的な発展，人間的な活動として解説するものである」とする健全な誤解について一言だけ触れておこう．他の歴史と同様，数学史においても「過去を現代の目で評価する」ことは傲慢であり，「過去を現代に復元する」ことはそもそも不可能である．歴史とは，結局のところ，過去を，できるだけ謙虚に，できるだけ丹念に眺めることを通じて，現代を相対化する視座を獲得することに他ならない．

謙虚かつ丹念に過去を眺める心得は，史実にできるだけ忠実にあたることである．「史実」は，特に近代以降の数学史の場合，書籍や論文として残された資料が中心であるので，歴史学の問題としては概して深刻でないが，資料を入手して読むだけ，といっても，資料の読解は意外に面倒である．言語の問題もないわけではないが，それ以上に，たった数百年であっても時の経過の中で，術語の意味も展開される数学の内容も，ときに微妙な，しばしば劇的な変化をも内包しているからである．

しかし，このような障害を越えて，資料，特に第一次資料を読み解く作業の中に数学史的な面白さがある．従来，日本にいては近代数学史の多くの第一次資料にアクセスすることが極めて困難であった．しかし，インターネットの普及は，数学史研究に関しても革命的な変化をもたらした．18 世紀以前の（すなわち，我が国に近代的な数学が導入されるよりも前の）数学文献が，世界の図書館や文献記録サイトの電子化サービスを通じて，入手可能になってきているからである．つまり労力を厭わなければ，最も楽しい数学史的な思索の機会が万人に与えられているという

ことである.

本書は，関数概念の歴史的展開についての概略正しい解説というだけでなく，読者がこのような主題に興味を持ったときに，ご自身の数学史を構築する際の，基本ガイドとなるように努めた.「史実」の引用や文献に詳しいという本書の特徴はそのためである．その意味で本書は数学史への誘いでもある.

本書のもう一つの特徴は，数学史関係の本としては異例なほど，豊富に演習問題をつけたことである．演習問題の主題は，歴史的な考察から数学の技術的な解決を問うものまで広く渡っているが，単なる歴史読み物として数学史を捉えて欲しくないという思いの外に，数学教育で話題となる様々な概念がどのような数学的・歴史的文脈で登場してきたものであるか，実践的に学んで欲しいという願いも込めている．また，本書ではできるだけ多くの図やグラフを提供することによって読者の便宜を図り，本書が通常の微積分学あるいは解析学の副読本として使えるように配慮した.

近年，数学は科学と技術の基盤に浸透し，広大な拡がりと深遠な奥行きをもって展開している．しかしまたそれゆえに，数学的な活動の意味を探り，理解を深化させ，またそれを共有することが難しくなっている．数学に限る話ではないが，急速に研究が発展している学問領域では，研究に必要最小限の知識を短時間に教育することが優先されている．教育・学習に割かれるべき時間の問題を視野におくならば「内容の精選」は不可避の課題であるが，抽象的な理論の体系である数学において，「効率化」は「空疎」と「貧困」に傾きかねない．他方，数学の深い理解と共感は，論理的，体系的に整理される前の試行錯誤の思索を共有することを通じて得られることも多い．著者たちは，「精選」の努力に先だって，整理の対象となる学問世界を歴史的に俯瞰する視点が必要であるという思いを強く持っている．論理的な洗練の対極にある具体例の豊穣さを忘れないようにしたいという願いからである．本書が，このような想いを共有してくださる数学関係者の一助になれば幸いである.

最後に，本書をできるだけ批判的なまなざしを忘れずに読んでいただくことをお願いしたい．数学史の書物・論文には第一次資料に当たっていないのではないかと疑われる記述がしばしば見られる．数学史において二次・三次文献の間違いを安易に踏襲するなど，およそあってはならないことが繰り返されるのはなぜだろう．少し調べれば間違いだとわかるものがいつまでも信じられているのは，人々が学問の権威を疑わないからからであろう．本書の著者は，権威を否定する．特に，数学や数学史において権威は無用である．本書も「誤謬なき数学史」を僭称するものでは決してない．多くの批判にさらされ，より正当な関数の歴史が書かれるための捨て石になれば望外の喜びである.

謝辞． 本書を執筆するに当たり，我々の作業が遅々として進まないにもかかわらず，近代科学社社長の小山透氏から根気よく激励していただいた．ここに心から感謝の気持ちを表したい．また，本書では Alex Craik 氏，蔡東虎氏，清水扇丈氏，鈴木咲衣氏，矢崎成俊氏，の各氏から画像の提供を受けた．どれも現場に行かなければ撮れないものばかりである．深くお礼申し上げたい．

本書を 恩師 藤田宏教授 に捧げる

2014 年 7 月
岡本 久
長岡亮介

目　次

付録

読者諸氏へ

本書は，関数概念の歴史的な発展を可能な限り史実に忠実に考察し，かつ，現代の解析学の学習者・研究者の関心に応えるように配慮し，現代数学的な視点を加味した記述を試みたものである．それによって，ともすれば完成された数学として，学生の側から見れば天下り的に，教師の側から見れば教育的な能率ばかりを視野において講じられることの多かった解析学の壮大な体系が，歴史的な発展のダイナミズムに満ちた，人間的なドラマとして迫力をもって伝えることができると期待している．

その目的を達成するために，本書は，基本的に 2 部で構成することとした．第 I 部は，数学的な詳細を省いて最も重要な流れを的確に理解していただくことを目的とする部分である．この部分をしっかり理解すれば，17 世紀に始まった関数概念の発展の概要がつかめるであろう．

しかし，数学には，それを支える論理が必須である．そしてその論理はしばしば技術的な詳細を省いて叙述することが困難である．したがって，そのときどきの数学を支えた技術的な工夫の妙を，単なる歴史的事実の詳述にとどまる退屈と非能率に堕することのないように議論すべきであろう．言い換えれば，現代の読者にとって刺激的でかつ有用であるように，適宜補充し適宜省略して，理論的な発展の歴史を現代数学を視野にいれて再構成するという試みが第 II 部である．したがって，話題によっては第 I 部と第 II 部に重複するところも出てくるが，それは以上の趣旨からお許し願いたい．

本書では様々な資料を引用する際に，原則として和訳することにした．和訳にあたっては，現代の日本語として大きな違和感なく読めることを第一にし，この方針に矛盾しない限りできるだけ原文に忠実に訳すように努めた．翻訳が困難なものについては原文を補った．言うまでもなく，和訳に伴う責任は著者たちが負うものである．

様々な数学者の伝記は Dictionary of Scientific Biography[3] やセント・アンドリュース (St. Andrews) 大学の数学史サイト [1] から採用している．

演習問題の中には難しいものもあれば簡単なものもある．そこで，難易度を✿の数で表すことにした．✿の数が多いほど難しいと理解されたい．

第Ⅰ部
おおまかな流れ

第1章　数学史の難しさについて

世に語り伝ふること，まことはあいなきにや，多くはみな虚言なり．あるにも過ぎて人はものを言いなすに，まして年月過ぎ，境も隔たりぬれば，言ひたきままに語りなして，筆にも書きとどめぬれば，やがてまた定まりぬる．道々のものの上手のいみじきことなど，かたくななる人の，その道知らぬは，そぞろに神のごとくに言へども，道知れる人は更に信も起こさず，音に聞くと見る時とは，何事も変はるものなり．[中略] 皆人の興ずる虚言は，独りさもなかりしものをと言はむも詮なくて，聞きゐたるほどに，証人にさえなされていとど定まりぬべし．——兼好法師，徒然草 73 段——

過去の人間たちを現代の考え方で査定することほど不公正なことはない．——英国の歴史家ウィンスタンリー[1]

記述を始めるにあたり，一般にはあまり理解されているとは思えない「数学史の難しさ」について，いくつかの大切なポイントに簡単に触れておきたい．というのも，数学解説の中の数学史にはたくさんの誤謬・事実誤認・いいかげんなゴシップが散乱しているからである．数学史は，数学ファンにとっては近付きやすく，しかも，夢とロマンを掻き立てる題材の一つであるようだ．そのこと自身は悪くない．いわゆる自然科学の啓蒙活動の最も有力な数学版と位置づけられている（？）ためか，この方面において，かなりの数の出版がなされ，また映像番組も作られてきた(たとえば [19] は素晴らしい)．本書の読者の中にも，ご自身が感じている「夢とロマン」の拡大を本書に期待なさる向きがあるのではないかと思う．一方で，数学史に関しては，有力な大衆書が確立した「定説」が数多くあり，熱烈な「支持者」があるものの，それらは誤謬を含んでいることがけっこうある．数学史に関する文章を読む際には本章冒頭の兼好法師の言葉を脳裏に思い浮かべていただきたい．誤謬は削除されていかねばならない．本書でもそうした努力は行うが，しかし，それを完全に遂行するために必要なエネルギーは膨大であって，本書の射程を遥かに上回る．ここで，本書がそのようなことにエネルギーを払うことを本筋とはできない

1　B. タックマン，*The March of Folly from Troy to Vietnam* に引用されている．

(もっと大事なことがある) 理由をいくつか簡単に述べ，本論に入っていきたい.

1.1 歴史的由来を探ることの難しさ

本書の主題は関数である．関数の歴史を念頭におくとき，一番最初の問は間違いなく「関数概念はいつどのようにして誕生したのだろう？」ではないだろうか．しかし，このような問は，そもそも歴史的な問になっているかどうかが問題である．というのも，この問を発するときは，発問者はふつう「関数概念」を自分は理解していると思っているが，歴史的な問としては，そもそもこの前提条件が崩れていることが多い.

実際，今日の大学では，関数とは次のようなものだと教わる.

> X と Y を空でない集合とせよ．任意の $x \in X$ に対してただひとつの $y \in Y$ が対応しているとき，関数 $f : X \to Y$ が定まったといい，$y = f(x)$ と記す.

しかしながら，本書で少し詳しく述べるように，このような定義が一般化したのは，19 世紀の後半からであり，それ以前には関数はこのような概念ではまったくなかった.

今日のような対応としての関数概念 (つまり写像概念) を基礎におく立場に立つと，何らかの意味での数学的な規則性を対応表にまとめること——その頂点には，三角関数値の表のようなものがあるだろう——にまで関数概念の起源を遡りたくなる．古代の偉大な天文学者プトレマイオス[2]は，今日天動説と呼ばれている彼の精緻な天文理論を構築した．そして，観測データと理論値との整合性を確認するために詳細な三角比の値が必要となった．彼の書『アルマゲスト』には，$x = 0.5°$ から始めて $x = 90°$ まで $0.5°$ 刻みの正弦表がある ([54, 262])[3].

その一部を表 1.1 に記した．4 桁程度の精度が認められる．実は，プトレマイオスはこれにとどまらず，表に載っていない x の値については線形補間で計算するようにしている．こう見ると，何とこんな古代に本格的な $\sin x$ という関数概念の芽生えや，補間という数値的近似法の萌芽が見い出せる，と思ってしまいがちである.

---

2 Claudius Ptolemy (AD85?-AD165?). 英語で読むときはトレミーと発音される.

3 この表を作るために彼が使ったのが今日彼の名を関して呼ばれる初等幾何の定理 (章末問題参照) であり，これが今日の言葉で言えば三角関数の加法定理に相当するので，これを利用して微細な角の三角比を計算し，そしてそれを利用してその他の角の三角比を計算できたのである.

表 1.1 60 進法で与えられたプトレマイオスの正弦表 ([54]). 左の 2 列がアルマゲストにあるもの. 右の 2 列は読者への参考のために著者が付け加えたもの. 現代の表現を用いるならば, これらは $120\sin(\pi x/360)$ の値である.

角度 $x°$	弦の長さ $120\sin(\pi x/360)$	十進法換算値	真の値
0.5	0; 31, 25	0.5236	0.523597
1	1; 2, 50	1.0472	1.047184
1.5	1; 34, 15	1.5708	1.570751
2	2; 5, 40	2.0944	2.094288
...	...	...	...
37	38; 4, 36	38.07666	38.076558
...	...	...	...
180	120; 0, 0	120	120

しかし, これから見ていくように, 対応としての関数概念が成立したのは, 微積分法を発展させる前提となった, 近代数学に固有の関数概念が誕生してからずっと[4]経過してからである. 少なくとも, 微積分法の成立にとって決定的だったのは, 決して対応としての関数概念ではなかった, と言わなければならない. 対応としての関数概念は, 微積分法の発展の中で, 様々な試行錯誤や誤解, あるいは論争を経てたどり着いた概念である. したがって, 三角関数値表のような数値的データの対応をもって, ここに近代数学において決定的な役割を演じた関数概念の起源を「見い出す」のは, 現在の知識をもって過去を評価する, という最も初歩的な誤りといわなければならない[5].

関数概念に限らず, ある数学的な概念, 数学的な方法, 数学的な発想が, いつ, どのようにして誕生し, どのように展開していったか, という問題は, 概して慎重な扱いを要する問題であり, わかりやすい回答を用意した途端に先入観の誤謬の罠にはまってしまうことが多い.

本書は, 関数概念を, 近代解析学の中心的役割を演じたものとして論ずるために, 現代的な関数概念を中世以前の文化の中に探す努力を敢えて放棄するものである. 同様の理由で, 西欧以外の文化圏における数学的な文化の中に現れる関数的概念を丹念に洗い出すことも諦める. たとえば, 和算では関数の概念がなかったという研究者が多いようなので, 本書でも和算に関数の概念があったかどうかは詮索しない. それは, 近代解析学に特有の関数概念の諸相を眺めてゆくことによって, 解

4 少なくとも 150 年ほど.

5 ユシュケヴィッチ [636] も同様の立場を取っている. もちろん, これは, 歴史的に複雑な過程を経て発見された写像としての関数概念が, 古くは, 古代の天文学研究の中にすら見い出すことのできるほど, 人類文化にとって根源的なものであった, という「非歴史的洞察」を否定するものではない.

析学の波乱に満ちた展開をより深く理解したいからである.

1.2 歴史を評価することの大切さと難しさ

巨大なエネルギーの制御から，遠い天体の運動や極微の世界を観測する技術まで，そして最近は高密度大容量の情報通信まで，近代解析学とそれに裏付けられた科学的な技術は，巨大な影響を文明に及ぼしている．一体このようなものが，なぜ，西欧においてのみ誕生したのか，我々は疑問に思う．なぜ，解析学，あるいは，その前身である微積分法は，近代西欧において発見されたのか，という疑問である．実際，日本を始め，西欧以外の文化圏にも西欧にひけをとらない高い水準の数学的な研究が存在していたことはいろいろな研究で明らかである ([18, 30, 70, 169, 195, 216, 238, 262])．部分的には，西欧を凌駕する水準の研究が和算に存在していたことに日本人として誇らしさを感じる人も少なくあるまい.

しかし本書では，これらを中心的な主題とはしない．それは，西欧の近代解析学の開拓した領域が，桁違いに大きな大陸的山脈を形成しているからであり，またそれゆえに，人類文化全体にとって決定的に大きな影響を残したからである.

西欧の近代解析学がそうした決定的力をもつように成長した理由を一言で述べることはもちろん不可能であろう．にもかかわらずそれを語らなければ近代解析学の歴史を述べることにはならない，という二律背反は歴史家の宿命である.

その覚悟を十分にした上で，主張を敢えて単純化するならば,「処理の機械性」を近代解析学の最も大きな，そして強力な特質として挙げることができよう．これは，やがてウォリスやライプニッツらによって,「普遍数学」と呼ばれるものである．伝統的な数学が，個別的な発見的思索を必須としてきたのに対し，普遍的な方法で次々と新しい問題の解決へと向うことができる新数学は信じがたいほどの威力に満ちていた．微積分法に似た発想は，古代数学にもあったし，中世のインドにもあった ([169, 216])．にもかかわらず，これらは普遍性を獲得することなく歴史の中に沈殿していったわけだから，近代解析学の獲得したそのような普遍性の起源は，近代に特有の数学的文化の中に探すべきであろう.

これに関する包括的な議論は重要であるにもかかわらず，歴史的事象を特定するのは容易でない．その理由は，時代を画する決定的な「業績」として後世に残るようなものでないからである．むしろ，社会的思潮を突き動かす深い底流として，いわば合奏における通奏低音のように低く響きながら大きな楽想の流れを支えるようなものであるからである．ここではこれに関連して二つの点を指摘しよう.

一つは，従来は「比例論」と呼ばれる複雑な議論を通じてしか扱えなかった「連

続的な量」に対する数論的＝四則計算的な実用的アプローチの受容である．これについては，本書の焦点とする主題を考慮すると，ここで詳述する余裕はないが，その概略だけを述べるなら，今でこそ当たり前になっている数直線的な概念と手法の受容である．13, 14 世紀頃のスコラ哲学者，特にオレーム[6]を中心とする「パリ学派」の学問的研究の中に積極的に登場した「質の量化理論」である ([97, 127])．これと並んで，より庶民レベルで進行した量の把握に関する革命的変化のきっかけとして，ステヴィン[7]による十進小数の啓蒙書の出版[8]を契機とする，無限小数を含む量の好きなだけ精密な表現の普及を挙げるべきであろう．これらなくては，これから述べる変数概念の形成も，そして，本論の主題である関数概念を中核にした近代解析学の誕生もありえなかったからである．

古代ギリシャの時代から中世にかけて，数とは自然数であった．有理数でさえ数ではなかった（ユークリッドの比例論は実数論に通ずるものがあるが，かと言って有理数を数とみなしていたわけではない）．ステヴィンは [243]（1585 年）において，小数で書けるすべてのものは等しく数として許容するという態度を示している．こうした連続体としての「数」はステヴィン以降の人々には素直に受け入れられていった（たとえば [116] 参照）．そして，小数表現の普及に伴い，数理的な文化における実用と理論との距離が驚くほど縮まった．16 世紀にガリレオ・ガリレイは，地上の運動を解明するために落下距離と通過時間の関係を叙述するにあたり，素朴な時空の連続体をその方法論的な根拠としていた．これに対し，アリストテレス派の伝統的保守的な論客を演ずる雄弁家ですら，この近代的な思想の枠組み自身を否定することができないほど，それが一般化していたことを例に引くと印象的であろう ([21])．

後に述べるように，このような素朴な連続量の概念は，厳密には，19 世紀の後半に至って初めて実数として厳密に定義される[9]ものである．しかし，16 世紀には既に市民権を得ていたと言えよう．17 世紀における近代的な解析学の誕生にとって最も重要な基盤であったと言うべきである．言語的に厳密な定式化を受けないまま，にもかかわらず同時代人に確実に共有されている時代精神とも言うべきものは，その明示的な言語化の困難のために精密な歴史記述からは省かれてしまうことが少なくないのだが，数学の歴史を考えるときには最も注意深い配慮を必要とする．

---

6 Nicole Oresme (1323-1382).

7 Simon Stevin (1548-1620).

8 *De Thiende*, [243], 1585 年．[237] に抄訳あり．

9 カントルやデデキントらによる実数の定義の出現である．

近代解析学の成立の文化的基盤として必須と考えられるもう一つの点は，いわゆる代数的記号法である．これは近代解析学の成立のための中心概念である関数概念に密接に結び付いているので，やや詳しく述べておこう．古代ギリシャのディオファントス[10]は不定方程式の研究で有名である．彼の本は彼独特の記号法で記述されていることはよく知られている[11]．しかし，素人にとっての読みにくさは大変なものである[12]．たかが記号法と思いがちであるが，優れた記号法は，優れた言語と同様，情報の蓄積と効率良い伝達のための中心であり，その意味で文化の中核ですらあるから，古代に代数学が存在したというような主張には注意が必要である．

現代数学における記号法の起源は，代数学 (Algebra) の名から連想されるように，アラビアにおける方程式の研究に端を発したものである．アラビアの代数学はピサのレオナルド[13]によって 13 世紀の初頭にイタリアへ紹介された．すぐには定着しなかったものの，いったんその便利さが認められると，急速にヨーロッパ各地に浸透していった．現代でも「求めるものを x とおく」という表現に残っているように「もの」を意味する「コス (coss)」に因んでコシストと呼ばれる人々がその伝道師となり，それがやがて大きな飛躍を迎える ([10, 79, 99, 170, 246])．

ここでは幾人かの有名な代数学者の功績とその歴史的な評価を試みたい．まず一人目は，カルダノ[14]である．三次方程式の根についての彼の解法公式に関してはタルタリア[15]との事件が通俗数学史の人気物語となっていてあまりに有名であるが，彼がその著書『偉大な術または代数の法則 (*Ars Magna*)』[106] において，三次，四次方程式の解法を公開したことが歴史的には重要である．この著書を通じて，代数的技法は「一部の学者の秘伝」から万人に公開・共有される人類の数学的知識となったのである ([256])．

とは言え，カルダノの使った記号表現は我々のものと比べるとまだはるかに煩雑である．[106] の 12 章でカルダノは，$x^3 = 6x + 40$ という方程式を扱うのだが，彼は，これを cubus æquatur 6.rebus p̃. 40 と書くわけである（[79] も参照せよ）．cubus とは未知数の立方，æquatur は相等性の主張，rebus とは，「もの」すなわち未知数である．カルダノは，加法 (plus) や減法 (minus) を $\tilde{\mathrm{p}}, \tilde{\mathrm{m}}$ と短縮記号化し

10 Diophantus of Alexandria (AD200?-AD284?).

11 たとえば，[78, 162, 246] などを参照されたい．

12 [78] によれば，$x^3 = 2 - x$ が，$\mathrm{K}^{\upsilon}\overline{\alpha}\,\ddot{\iota}\sigma\,\mathring{\mathrm{M}}\overline{\beta}$ ⋔ $\varsigma\overline{\alpha}$ である．

13 Leonardo Pisano (1170?-1250?)．通称であるフィボナッチの方が有名であるが，彼自身は自分の著書にフィボナッチという名前を使っているわけではなく，あだ名であったという証拠もないので，このすぐれた数学者をフィボナッチと呼ぶことはやめておく．

14 Girolamo Cardano (1501-1576)．ラテン名は Hieronymus Cardanus.

15 Niccolo Fontana (1500-1557)．Tartaglia はあだ名であるが，彼の本には本名の Fontana ではなく Tartaglia が使われているので，本書ではタルタリアを用いる．

ていた．しかし，$+$ や $-$ は使っていない．

現代の教科書では，カルダノの公式を次のように説明する．一般の三次方程式は

$$x^3 = px + q \qquad (p, q \text{ は定数})$$

の場合に帰着できる．このとき，

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \tag{1.1}$$

が解を与える．しかしこの式は [106] のどこにもないのである．上で説明したように，彼の記号ではありえないのである．あるのは，p や p が具体的な数で与えられたときにカルダノの方法で具体的に説明する「方法」だけである．主張していることは同じであるが，形式はまったく違う．カルダノの公式が公表されたのは 1545 年であるが，この頃には我々が知っている代数的な記号法は存在しなかった．彼の英訳本 [106] では現代的な記号を使っているので，これを見ただけだとその困難さが伝わらないが，彼の解法の叙述と理解は，現代の我々には想像を絶するほど難解なものである．

1572 年に出版されたボンベッリの『代数学』[94] では未知数に対して不思議な記号が使われている．x が $\underset{\smile}{1}$, x^2 が $\underset{\smile}{2}$, x^3 が $\underset{\smile}{3}$, $\cdots$ という調子である．したがって，

$$\begin{array}{lccc} & \overset{\underset{\smile}{1}}{6} & p. & 4. \\ \text{Con} & 8 & m. & \overset{\underset{\smile}{1}}{2}. \\ \hline & \overset{\underset{\smile}{1}}{4} & p. & 12. \end{array} \quad \text{は} \quad \begin{array}{lr} & 6x + 4 \\ +) & 8 - 2x \\ \hline & 4x + 12 \end{array}$$

を意味する[16]．1585 年の [243] でステヴィンは，x, x^2, x^3 を，それぞれ，①，②，③と表すことを提唱している．これらがネッセルマンのいう「省略代数」の段階である[17]．なお，カルダノの公式の歴史については [256] を見よ．また，代数記号の歴史・変遷については [104] が詳しい．

16　未知数 $\underset{\smile}{1}$ は文中では横に，数式のモードでは上に来る．

17　ネッセルマンが *Die Algebra der Griechen*（1842 年）で提唱した分類で，古代ギリシャや中世アラビアで展開された代数を修辞代数（rhetorical algebra）とし，カルダノのような代数を省略代数（syncopated algebra）と名付け，ヴィエトやデカルトに始まる現代のような代数を記号代数（symbolic algebra）と分類した（[170, 246]）．

本格的な代数的記号法はヴィエト[18]（[265]，1591年）に始まるといってよかろう．ヴィエトの仕事の歴史的意義は[265]の翻訳者による次の言葉に的確に表現されている．

> …，ヴィエトの新しい方法は，複雑な諸項の中に分け入り，それを解きほぐす演算をより見やすくするという巨大な利点をもっていた．これは，変数（未知量）を表すために文字を用いたということよりもむしろ，既知量すらも文字で置き換えたことによるものであり，知られる限り，このような置き換えはヴィエトが最初である．

ヴィエト以前の代数学では具体的な数値を係数とする方程式を使いつつ，その方法の妥当範囲の一般性を通じて一般公式の説明をしていた．この意味で，疑似一般的な記述にとどまらざるを得なかったのに対し，ヴィエトは既知数も文字で表すことによって方程式の一般論の構築に成功した([242])．つまり，ヴィエト以前には $x^3 = 6x + 40$ や $3x^3 + 2x^2 = 3x + 40$ しかなかったのが，ヴィエトは（現代の記号で書けば）$x^3 = ax^2 + b^3$ を使い始めたと言うことができる．

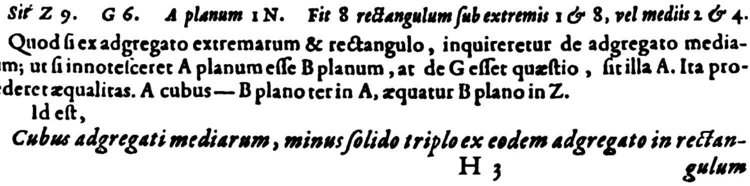
とは言え，彼の記号法は，今日の記号法と比べると決して易しくはない．べきを指数で表す記号を有していない点では，ボンベッリやステヴィンよりも劣っている．彼は未知数に母音字，既知数に子音字を使うという意味的な区別を行っており，x を未知数としていたわけではない．また，ヴィエトの記号法では両辺の次元を揃えるという制約が科されていた．たとえば現代なら $x^3 - 3bx = bc$ と表される式が，A cubus – B plano ter in A æquatur B plano in Z と書かれることになる（図1.1参照）．一次が線分の長さ，二次が面積，三次が体積であるから，面積＝長さ，という式は意味がないということになり，使うことができないのである([11, 79])．上の例で言うと，B は面積の次元をもち，これに A をかけたものが体積の次元をもつから A の3乗と比較ができるようになる．単に B と書いてあるのではなく B plano と二次元性を強調せねばならないのである．

この制約にもかかわらず，未知数のみならず既知数をも文字で表すという発想は歴史的には重大であった．確かに，単なる方程式の解法という観点だけから見れば，従来の解法の疑似一般性を考慮するなら大きな進歩には見えないが，実はこのような記号法の発明によって，数学そのものが新しい地平を開拓するという点が重要である．

我が国ではヴィエトと比べると，ハリオット[19]の功績に触れる機会は少ないが，

18 François Viète (1540-1603)．ラテン名はウィエタ (Franciscus Vieta)．

19 Thomas Harriot (1560-1621)．



Sit Z 9. G 6. A planum 1 N. Fit 8 rectangulum ſub extremis 1 & 8, vel mediis 2 & 4.
Quod ſi ex adgregato extremarum & rectangulo, inquireretur de adgregato mediarum; ut ſi innoteſceret A planum eſſe B planum, at de G eſſet quæſtio, ſit illa A. Ita procederet æqualitas. A cubus — B plano ter in A, æquatur B plano in Z.
Id eſt,
Cubus adgregati mediarum, minus ſolido triplo ex eodem adgregato in rectan-
H 3 *gulum*

図 1.1 ヴィエト全集 [264] より.

彼が 1631 年に出版した代数の書物 [233, 240] は，ヴィエトの影響を強く残しているものの，いくつかの点で後のデカルトの記号法の先駆といえる要素もあった．たとえば，ヴィエトの A cubus と「意味」を残した記号法を，ハリオットは aaa と「単純化」した[20]．多項式を現代的な形で登場させたのも，ハリオットが最初であるという[21]．また，多項式の根 a, b, c を使うとその多項式が $(x-a)(x-b)(x-c)$ と表されるという基本性質に最初に注目したのもハリオットである．このようにハリオットは代数的記号法に向かって重要な貢献をした人物であるが，他方で，彼が記号法に関しすべての点で高い見識を示したのではないということも忘れてはならない．次元が整っている等式のみに縛られていたのはヴィエトと同様である．また，ハリオットは，括弧を表す記号 ( ) を持たなかったので，たとえば，今日なら $(a^2+bc)(a-d) = a^3 - da^2 + bca - bcd$ ですむ式をハリオットは

$$\left.\begin{array}{l} aa+bc \\ a-d \end{array}\right| \;\text{エ}\; aaa - daa + bca - bcd$$

と表現している[22]．括弧記号の普及についてはさらに歴史の進展を待たなければならない[23]．

現代的な代数的記号法を確立した最大の功労者がデカルト[24]であることは確実である．デカルト（[125]，1637 年）は，従来の記号法に残っていた図形的な意味を連想させる「平方」，「立方」さらに「二重平方」といった伝統的な累乗表現を排除して，$a^2, a^3, a^4, \cdots$ のような「明晰判明」な指数表現を導入し，その優位性を

20 ヴィエトは大文字を使い，ハリオットは小文字を使った．

21 1631 年のハリオットの本を編集した Walter Warner はそう主張している．

22 エ がハリオットの等号である．カジョーリ [104] によれば，等号に = を使ったのは，レコードが最初で，1557 年のことである．しかし，これは広まらず，1631 年のハリオットやオートリッドの後で英国で広まったようである．デカルトは = を ± の意味に使っていたとも言われている ([104])．

23 ふたつ以上のものをまとめるとき，たとえば $a(a+b)$ を表すときには，$a \times \overline{a+b}$ という流儀もあったし，$(c-b)\ell$ を $c-b, \ell$ と表すこともあった．17 世紀には様々な記号が生まれてきた．括弧もその中の一つであるが，最初は不人気であった．しかし，オイラーが ( ) を多用するようになるとこれが標準となっていったようである．それでも括弧が完全に定着するわけではない．以上の歴史は [104] に基づいたものである．

24 René Descartes (1596-1650).

大いに喧伝した．さらに「単位（便宜的な次元）」の導入により，従来の記号法に付きまとっていた次元の一致の制約を打ち破り（量の同次性の確立），今日我々が用いているものとほとんど同じ代数的記号法を確立した（[104] の 392 節，[11] の 113 ページ）．[125] の一例を示せば，

$$z^3 = az^2 + b^2z - c^3 \quad は \quad z^3 \propto + az^2 + bbz - c^3$$

と[25]書かれていた[26]．あるいは，

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \quad は \quad z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

である[27]．次元の制約に関しては，この例が示すように，幾何学的対応がある場合には，デカルト自身も守っていたが，そうした自己規制は不要である，という原則は持っていたのである．

ニュートンやライプニッツになると，現代のものとの違いはあるものの，それほどの違和感はない．ただ，今から見ると垢抜けないヴィエト流の A cubus，あるいは，ハリオット流の $aaaa$ などという表現を使う人も多かった[28]．

関数の歴史の立場から言えば，指数表現の圧倒的な優位は，指数を負数や有理数にも拡張することにある．このような意味での本格的な指数表現は，ウォリスやニュートンの発明でありその後急速に普及してゆくことになる（[324]）．

詳しくはまた後に論ずるが，デカルト的な近代的代数記号法を通じて，**未知数の概念が変数の概念へと変容し**，それを通じて変数間の関係として関数概念が次第に形成されていった．その意味で，近代の代数的記号法は，アラビア伝来の方程式の研究を大きく前進させたことと並び，否，それらよりも遥かに重要な歴史的な貢献として，近代的な解析学の方法論的な基礎である関数概念を準備したという点を強調しておかなければならない．

記号を使った代数学は東洋にも存在した（[70, 46, 18, 30, 195, 238]）．たとえば，和算では [46] の第 2 巻に次の記述が見える．

---

25 なぜかはわからないが，べきのうちで 2 乗だけは例外で，a^2 と書かれたり aa と書かれたりしていた．これについてはデカルト以降，18 世紀まで続いている．オイラーは aa 派であった．しかし，時の流れにつれて aa は廃れ，a^2 が支配的になった．

26 デカルトは等号を $\propto$ で著していた．この流儀はしぶとく生き残ってゆき，1690 年でもロルがこれを使っている [237]．

27 これに見られるようにデカルトとハリオットの記号法には共通点が多く，デカルトに対するハリオットの影響の可能性も指摘されている．デカルト自身は否定しているが，単なる偶然の一致と考えるにはいささか不自然である（[240] の 27, 28 ページ）．

28 カジョーリ [104] によれば，おおよそ 1660 年か 1670 年頃になって，自然数のべき乗を指数で表現する方式が多数派になったようである．A cubus，あるいは C などという表現がハリオットやデカルトの登場とともに一挙に消え去ったわけではないのである．

$$
\begin{array}{lll}
\text{甲} + \text{乙} & \text{は,} & |\text{甲}\ \ |\text{乙} \\
\text{甲} - \text{乙} & \text{は,} & |\text{甲}\ \ \nmid\text{乙} \\
\text{甲} \times \text{乙} & \text{は,} & |\text{甲乙}
\end{array}
$$

と表されるということである．この程度ならばそれほど悪い記号法でもあるまい．しかし，

$$
\text{甲}^2, \text{甲}^3, \text{甲}^4, \cdots \text{を,} \quad \left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{巾}\end{array}\right., \ \left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{再}\end{array}\right., \ \left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{三}\end{array}\right., \ \cdots
$$

$$
\sqrt{\text{甲}} \ \text{を,} \quad \left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{商}\end{array}\right. .
$$

と表していたのはどうであろう．また，[53] には次の用例が見える．

$$
\begin{array}{c}
\text{二}\left|\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{巾}\end{array}\right. \\[1ex]
\text{三}\left|\text{乙甲}\right. \\[1ex]
\text{四}\left|\begin{array}{l}\text{乙}\\ \text{巾}\end{array}\right. \\
\text{ハ} \\
\left|\begin{array}{l}\text{丙}\\ \text{巾}\end{array}\right. \\
\text{ナ} \\
\text{リ}
\end{array}
$$

これは

$$
\frac{1}{2}\text{甲}^2 + \frac{1}{3}\text{甲乙} + \frac{1}{4}\text{乙}^2 = \text{丙}^2
$$

を表している．

和算が我が国の偉大な発明であることはよく知られており，著者らも和算に対する尊敬の念では人後に落ちないつもりである．しかし，デカルト以降の西洋数学における記号の使い方に比べると，和算もそれなりの工夫があったとはいうものの，使い勝手で及ばないということは否定できない．こうした表記法から関数概念が発生・進化してゆくのは困難であろう．関数概念の成立は西洋の記号法と切っても切り離せないものであると言って間違いはなかろう．

1.3　第一発見者問題について

数学史に対して寄せられる最も多くの疑問は，「…を最初に発見した人は誰か？」というものである．民族主義的な願望がこれに加わると，ときには論争に発展することすらあるが，この種の第一発見者問題にきっぱりと答えることが，そもそも容易ではないことを指摘しておきたい．また，これに答えること以上に歴史的に重要な視点があること，反対に，単純な答えを出すこと自身にはあまり意味がないことを，「微積分法の発見者問題」という有名な問を例に引き，触れておこう．

細かい時間的なずれや出版などによる発表の時期を別にすれば，「微積分法は，ニュートン[29]とライプニッツ[30]によって，ほぼ同時に，しかし独立に発見された」というのが，今日大方の一致する見解である ([76, 96, 97, 170])．しかし，同じ発見が，異なった場所で独立になされたのは，単なる偶然の結果ではない[31]．微積分法の発見へと連なる研究が，彼ら以前にふんだんに蓄積していたのである．デカルト，フェルマー，カヴァリエリ，トッリチェッリ，ロベルヴァル，バロウ，ウォリスといった人々の先立つ研究がニュートン，ライプニッツの偉大な発見を準備するかのごとく着々と進行していたことは，多くの研究で明らかにされている ([43, 97, 99, 136, 170])．

ほんの一部ではあるがこうした先達の例を挙げてみよう．カヴァリエリ[32]は不可分者[33]を使って，今日「カヴァリエリの原理」と呼ばれる手法を開発し，求積問題に重要な貢献をした[34]．これはまさに近代的な積分学の嚆矢(こうし)である[35]とともに，古代ギリシャにおいてアルキメデスが発見法として使い，またデモクリトスが原子論の立ち場から接近しようとしていた求積術の近代における再生と見る（バロン [76]）こともできよう．

29　Isaac Newton (1643-1727).

30　Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).

31　解析幾何学がデカルトとフェルマーによって独立に発見されたこともよく知られている．もう一つの例として，連続関数の定義と性質についての厳密な扱いがボルツァーノとコーシーによってほぼ同じ時期に提起されたことが挙げられる．これについて詳しくは第 II 部第 5 章を参照されたい．

32　Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647).

33　これは，英語の indivisible に相当するカヴァリエリの数学の基本概念である．線分は無限に多くの点から成っており，面は無限に多くの線から成っている．彼は，線や面や立体を作る最小の構成要素として，不可視の最小単位の存在を仮定したのである．これが不可分者である．

34　*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635 年)．[237, 241] に部分訳がある．

35　ボイヤー [97] によれば，カヴァリエリは $\int_0^a x^n \, \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ に達していた．

同じくイタリア人トッリチェッリ[36]が1644年に発見した，「ある種の無限に伸びた立体図形は，長さが無限大であるにもかかわらずその体積は有限である」という事実は，当時の学問世界に相当衝撃的な事件であったという[37]．現代の積分の知識があればこれを証明することは難しくはない（章末問題）．しかし彼がこれに気づいたときニュートンはまだ生まれたばかりであり，当時の人々には微積分の道具を使うことはできなかった．この命題は当時の人々の目に大きなパラドクスと映ったとしても不思議はない．ロベルヴァル[38]は，様々な曲線の接線問題を提起し，自ら解法を見いだす一方で，サイクロイドの面積を決定することにも成功した ([170, 247, 632])．出版は彼の死後，1693年であったが，発見したのは1634年のことと言われている．また，バロウ[39]は，微積分学の基本定理（微分と積分が互いに逆の演算になること）に限りなく接近した最初の一人である ([99, 111, 136, 170, 179])．1685年頃，レン[40]はサイクロイドの長さを決定している ([83, 459])．

ニュートンに特に大きな影響を与えたのは，バロウとウォリス[41]である．とりわけウォリスの『無限の数論 (*Arithmetica Infinitorum*)』([266]1656年）は，今日も彼の名に因んだ無限積の公式[42]が登場する書物としても有名であるが，彼はこれを次のように導いている：彼は，現代的に最も単純化して表現すれば，

$$I(p) = \int_0^1 (1 - x^2)^p \, \mathrm{d}x$$

の $p = \frac{1}{2}$ に対する値を求めた．彼の方法は現代の我々が授業で習う方法（変数変換）とは根本的に異なる．彼は，様々な p に対する $I(p)$ の値を計算し，その値がもつ規則性に基づく大胆な「補間法」によってこれを求めるという方針をとる ([136])．その導出方法には，今日の目から見ると，多くの不十分な所や論理的飛躍を指摘することができるが，きわめて独創的である．この業績をはじめ，代数学の研究や曲線論を含め，ウォリスの数学的な仕事はニュートンに多くの示唆を与えたことがニュートン自身の残した読書記録[43]に見い出される．

---

36 Evangelista Torricelli (1608-1647)．水銀柱を使って大気圧の存在を証明した物理学者でもある．

37 [241] の 100 ページ，[153] の 227 ページ，[638]．

38 Gilles Personne de Roberval (1602-1675).

39 Isaac Barrow (1630-1677)．ケンブリッジ大学の初代ルーカス教授であった．彼がルーカス教授職を辞任した後にそれを引き継いだのがニュートンである ([269])．

40 Christopher Wren (1632-1723)．建築家として不朽の業績を残している．

41 John Wallis (1616-1703).

42 円周率を次のように無限積で表す：

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

43 [270] の第 1 巻の Annotations.

これらの数学者に加えて，ホイヘンス[44]の独自の功績にも言及しなければならない．光の波動説の提唱や振り子時計の発明などが有名であるが，同時に，サイクロイドの数学的な特性の研究を含め，微積分法的な問題に対して独自の境地を開拓し，重要な貢献を残した．ライプニッツがホイヘンスから受けた影響は大きい．ホイヘンスについては [72] を見よ．

ニュートンやライプニッツ以前に，こうした微積分法の先駆的研究がたくさんあった，ということを再度確認しておきたい．しかしながら，これは，ニュートンやライプニッツの業績が些細であるということではまったくない．彼らの偉大な仕事が，こうした多くの人々の業績の上にはじめて成立したからこそ，彼らが同じような発見をほぼ同じ時期に，しかし互いに個人的には独立に行ない得たのであろう．偶然の一致というよりは，「まさに時期が熟していた」([97]) と評価するのが正当であり，他方，数学史としては，同じような先駆的な研究に恵まれていた二人の天才が，あれほどまでに違う理論体系 (少なくとも見掛けの上では)[45]に固執したことの意味の解明という問題の方が，第一発見者を特定するという問題よりは遥かに興味深い，と著者は思う．

なお，当然のことながら，ニュートンにしてもライプニッツにしても，彼らが用いた記述のスタイルは，現在のものとはかなり違うので，内容を的確に解読すること自身が容易ではないことも断っておこう[46]．併せて，彼らの議論の展開をたどってみると，彼らの結果のすべてが現代的知見から見て論理的に正当化できることにも注意を向けておきたい．しかしながら，それは彼らの数学的天才を賞讃するというよりは，むしろ，「素朴な議論が誤謬につながらない程度の対象を論じていたという歴史的幸運がある」と言うべきであろう ([97, 246, 535])．

1.4 歴史的評価の弁証法

数学の歴史を見ていくと，その後の歴史の展開の中で，捨て去られていく理論やアイデアも少なくない．それを現代の立場から見て，安易に評価することは，後出しジャンケンに似た不公正である．そういう不公正を起こしやすい例を挙げよう．

---

44 Christiaan Huygens (1629-1695)．オランダ人だがパリで活躍した．伝記 [72] 参照．

45 一言で言えば，流量 (fluent) の瞬間的な変化である流率 (fluxion) を基礎におきつつ，瞬間的な流量の究極の比のような概念を幾何学的に正当化することにこだわったニュートンと，dx, dy を無限小の 2 辺にもつ「特性三角形」が可能にする計算的な合理性の威力に基づいて新数学の研究成果の豊穣性に魅せられたライプニッツの違いは，しばしばそう信じ込まれているような単なる記号法の違いにあるのではない ([481])．

46 たとえば [67][110][270] を見よ．

18 世紀数学をリードした数学者がオイラー[47]であることに異を唱える人はいないであろう．彼が著した解析学の書物・論文には「無限大」や「無限小」が頻繁に登場する．これは怪しげなものである．ニュートンですら，少しでも厳密な取り扱いを求めようとして，「無限小」については慎重な言い回しに終始していたわけであるから，そんな「無限小」を大胆に使いこなしていたオイラーはある意味で「猛獣使い」である．その使い方は文字通り追えば（= 表面的に見れば），そのままでは正当化できない「あまりに乱暴」な，あるいは「あまりに素朴」な論述を含んでいたことは否定できない．

他方，オイラーの時代は，啓蒙主義が流行し合理主義的な精神が高揚していた時代でもあった．この時期にダランベール[48]のように微積分法の基礎付けに関心を抱く人が登場したのは，啓蒙主義的な精神が背景にあったと想像する．実際，ダランベールは，ディドロに協力して『百科全書』の中の数学関係の項目を執筆するが，我々の注意を引くのは，彼が「極限 (limite)」の項を執筆し，極限概念を基礎におくことによって，ライプニッツ微積分の伝統とも言うべき無限小の概念を排除した微積分の構築ができるという考えを推進した点である．ダランベールの極限の概念は，後世の批判に耐える厳密性を持っていなかったが，極限に基づいて微積分法を基礎付けようとする方向は，まさに時代に向かう方向であったし，同時代人への影響という点でも，歴史の中で重要な位置を占める ([96, 97])．ダランベールの微積分の基礎付けに対する関心には，同時代人であるオイラーに対する数学上のライバル関係も背景にあったことも考慮されるべきかもしれないが，数学史的には，むしろダランベールが若い頃からこの手の問題に関心を有していたこと，さらには，ダランベール以外にも基礎付けの問題に関心を抱く数学者が存在していたことがより重要であろう．

そのような数学者の代表はラグランジュ[49]である．彼自身は，変分法などの数学上の華々しい問題がほとんど一段落してしまい，残った問題は基礎付けくらいしかないと悲観的に考えていたことがあったということである[50]．後にやや詳しく述べるように，ラグランジュは，ダランベールの死後，ダランベールとは正反対に，代数的な級数展開を基礎におき，無限小はおろか極限すら微積分から追放することによって，微積分学に厳密性を与えることができると考えたのである ([151])．このラグランジュの企ては，『解析関数の理論』[186] において公表された．これは，現

47 Leonhard Euler (1707-1783).

48 Jean le Rond d'Alembert (1717-1783).

49 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

50 たとえば [246] の 136 ページには，「奇妙なことに，18 世紀の終わりにかけて，数学のリーダーたちの一部は『数学で開拓すべきところはもはやなくなった』というふうな意見を述べていた」とある．

代の言葉に直せば「形式的べき級数の理論」であり，現代人から見て致命的な欠陥のある代物であった．

ラグランジュの試みが数学的には失敗であることがすぐ後の世代によって明確に指摘され，さらに，極限概念に基づく微積分法の厳密化が成功することを考えれば，多くの誤謬を含んでいたダランベールの研究の方が，むしろ歴史の進行方向を向いており，後から出発したラグランジュのそれは退化とすら見える．しかし，微積分学を，幾何学から独立した，純粋に解析的（当時の意味で代数的）な分野の数学として確立しようとしたという点で，ラグランジュの『解析関数の理論』は，重要な貢献と見なしうる[51]．

理論的な間違いがあったら数学的には意味がないという評価は，現代における数学的業績を評価する際は一般には妥当であろう．しかし，歴史的な視点から見るときには，これほど単純にはいかないということを肝に銘ずる必要がある．概して言えば，偉大なオイラーをはじめ，18 世紀の解析学が，現代の目から見ればきわめて曖昧な論理的根拠の上に構築されていたことは否定すべくもない．土台がそのように脆弱であったにもかかわらず，その上に真に偉大な発展がなされたことは，まさに歴史のパラドクスである．しかし，厳密な枠組みに拘泥しているばかりでは先へ進めないというのも事実である．この不思議なパラドクスの本質に迫る努力を放棄して「コーシー以前の数学者は，厳密な推論にまったく無頓着で，級数の収束と発散も区別していなかった．その状況を打破したのがコーシーである.」といった評価を下してしまうのは，公正な歴史評価とは言えない．

第一には，微積分法の合理化・厳密化の必要性は漠然とは共有されていたものの，その緊急的必要性は感じられていなかったし，それをどのように実行していくべきなのか，具体的なアイデアを明確にもっていた人はほとんどいなかった，という点が指摘されよう．より正確に言えば，ほとんどの数学者は，いまから見ればいい加減な水準とは言え，彼らの視界の中では十分にわかったつもりになっていたのである ([150, 179, 180])．

たしかに 18 世紀の数学者達は級数の収束についていささかルーズであったが，級数の収束・発散を完全に無視していたというわけではない．たとえば，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ が無限大に発散することはベルヌーイ兄弟も知っていたし，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ が有限な値になることも知っていて，その値を求めようと必死の努力を払っていたという ([131])．つまり，18 世紀の数学者は，具体的な場面，特に数学的に興味深い場面では必要な注意を払う，という数学的センスを発揮していたのである．この

51 このあたりの歴史は第 II 部で詳しく述べる．

ことを考慮すると，「18 世紀の数学者は収束・発散を気にせずに計算していた」というのは単純過ぎる評価と言うべきであろう．

第二に，微積分法の厳密化に成功し，解析学という新しい数学の分野を確立したと思われているコーシーについても事態は少し複雑である．確かに，コーシーが 1820 年代にパリの理工科大学で展開した微積分法の基礎に関する叙述は，極限概念の持つ論理的な困難を解消した，まさに革命的なものであった ([150])．そしてこれは，今日我々が大学で最初に学ぶ厳密な微積分学と本質的に同じものである．しかし，このようなコーシーですら，微積分学の全容を厳密に理解していたというわけではない．コーシーはいくつもの「誤ち」を犯しており，そのうちのいくつかは本書の第 II 部でも取り上げる予定である．18 世紀以前の数学がすべて単純素朴な古き良き時代の数学であり，コーシーを解析学の厳密化のチャンピオンと見なすような歴史評価は，あまりに単純である．

さらに危険なのは，革命的なコーシーの理論・アイデアが一挙に数学界に浸透していったと思い込む傾向である．事実は必ずしもそうではない．一例を挙げよう．コーシーは微分できない関数があることはよく理解していたものと思われるが，「任意の関数は有限個の例外点を除いて微分可能である」という命題を証明しようとし，できたつもりになっていた人々が，アンペールから始まって 1860 年代まで続いた．思い込みというものは容易には消えないものである．

「単純過ぎる過去の精算」は，「素朴過ぎる過去の礼賛」と同じように危険である．こうした観点から，従来から続いてきている定説も見直しが必要であろう．これまで微積分学の講義の中で漫然と使われてきた歴史的コメントも，事実でないものは削除し，正しく使ってゆかねばならない．過去の人々の業績を現代の視点で評価することに我々は慎重な姿勢をとるべきであることを常に思い起こしたい．

* * *

演習問題

[問題 1] ✿✿ 今から四千年ほど前のバビロニア時代の粘土板には様々な数表が記されているという ([212] の 34 ページ，および，[5] の 24 ページ)．こうした数表についてベル ([82]，32 ページ) は「関数への直覚」と述べている．$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ と $1, 1.414213, 1.732050, \cdots, \sqrt{n}$ という対応表があったとして，これを関数 $\sqrt{x}$ の先駆けと見なすことに関して，読者自身の考えをまとめてみよ．

[問題 2] ✿ 三角関数の加法定理から導かれる倍角の公式（あるいは半角公式）を用いると，たとえば，$\sin x$ の値から $\sin(x/2)$ の値も求められる．こうして，$\sin 36°$ や $\sin 30°$ の値から，$\sin 18°, \cos 18°, \sin 15°$，$\cos 15°$ などの値が求められる．これらを利用して

sin 3° の値を計算せよ．また，この方法の延長では，sin 1.5° は計算できても sin 1° は計算できない．工夫して，sin 1° の良い近似値を求めてみよ．

[問題 3] ✿ プトレマイオスによる次の定理（トレミーの定理とも呼ばれる）を証明せよ．図 1.2 のように円周上にある 4 点 $ABCD$ に関し，$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}$. が成り立つ．

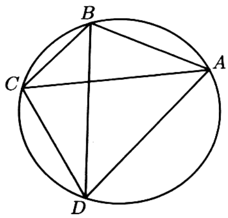


図 1.2 A, B, C, D は円周上の 4 点.

[問題 4] ✿ ヒース [163] によれば，アリスタルコスは紀元前 3 世紀に天動説を唱え，その著書のなかで，（現代語に翻訳すれば）$\dfrac{\sin x}{x}$ が $0 < x < \pi/2$ で単調減少であることを初等幾何学的に示している．これを微分法を用いて証明せよ．

[問題 5] ✿ カジョーリ [104] に基づいて，等号および不等号（=　<　>）がどのように進化してきたか調べてみよ．

[問題 6] ✿✿ ヨーロッパ中世以後で最も古い最大最小問題は 1471 年のレギオモンタヌス[52]の問題であると言われている ([130, 203, 207])．彼の意図は定かではないし，彼がその答えを持っていたのかどうかもわかってはいない．しかし，それは以下のような近代的な解釈が可能である．図 1.3 の左図をご覧いただきたい．美術館で壁に絵が架かっており，それを図の太い線で表している．これを見ている観客が最も視角を大きくするには壁との距離 x をどうとればよいか？

レギオモンタヌスの問題は次のように変形が可能である．図 1.3 の右図で円は土星を表し，線分 ab が土星の輪であるとする．このとき，緯度が何度のところから見たときの輪の視角が最大となるか？

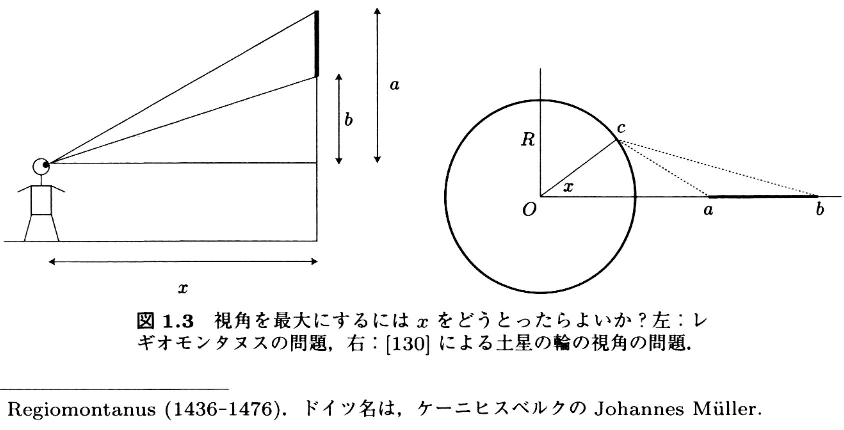


図 1.3 視角を最大にするには x をどうとったらよいか？左：レギオモンタヌスの問題，右：[130] による土星の輪の視角の問題.

---

52 Regiomontanus (1436-1476)．ドイツ名は，ケーニヒスベルクの Johannes Müller.

[問題 7] ✿ ハリオットの本には次の不等式が登場している ([240]). この不等式を証明せよ. ただし, $0 < x, 0 < y, x \neq y$ とする.

$$\left(\frac{xy(x+y)}{2}\right)^2 < \left(\frac{x^2+xy+y^2}{3}\right)^3.$$

[問題 8] ✿ イタリア人メンゴリ[53]が 1650 年に得た次式を証明せよ.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots = 1, \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots = \frac{3}{4}, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots = \frac{1}{4}. \tag{1.4}$$

[問題 9] ✿ ベルヌーイの不等式と呼ばれている次の不等式は, 彼よりもさらに前にバロウが証明したものである (1670 年). この不等式を証明せよ.

$$(1+y)^a > 1+ay \qquad (1 < a,\ 0 < y).$$

[問題 10] ✿ トッリチェッリのラッパ, すなわち, 曲面 $z = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ $(1 \leq z < \infty)$ の表面積が無限大であり, これが平面 $z = 1$ と一緒に囲む領域の体積が有限であることを示せ.

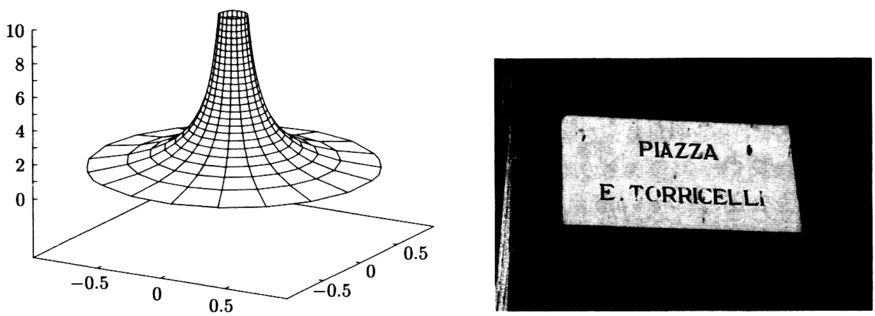


図 1.4 左：トッリチェッリのラッパ, 右：イタリアのピサ市にあるトッリチェッリ広場の標識 (2005 年 岡本久撮影).

[問題 11] ✿ $y = f(x)$ は $1 \leq x < \infty$ で連続であり, 単調減少で, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ と仮定する. この曲線を x 軸の周りに回転させたラッパ状の物体の体積が無限大で表面積が有限であるようにできるか？

53 Pietro Mengoli (1626-1686).

[問題 12] ✿ 有名なコペルニクスの *De Revolutionibus Orbium Coelestium*（1543 年）には，次の定理が挙げられている（[24] の 55 ページ）．これは何を意味するか？

> 定理：圓に四邊形を內接させれば，その對角線の作る矩形は相對する二邊の作る矩形の和に等しい．

[問題 13] ✿ サイクロイドは，適当に座標をとると $(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と書き表すことができる（図 1.5 参照）．これと x 軸で囲まれる領域の面積を求めよ．（プロクター [220] によれば，ロベルバル (Roberval) がこの求積が可能であることを示すのに 6 年もかかったということである．ロベルバル自身がどういうふうに求積したのか知りたければ [632] を見よ．）

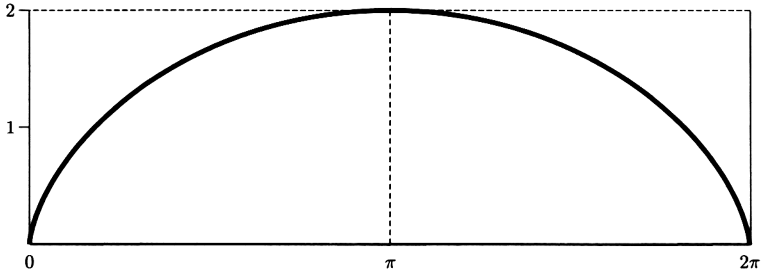


図 1.5 サイクロイド．

[問題 14] ✿ [459, 632] によれば，サイクロイドの周を初めて計算したのはレン[54]で，1658 年のことある．サイクロイドの周が，それを作り出す円の直径の 4 倍であることを証明せよ．

54 Christopher Wren (1632–1723)．建築家として有名である．イギリスの王立協会の創立メンバーで，会長にもなった．[83] 参照．

第2章　関数

本章の目的は17世紀から19世紀までの間に関数という概念がどう現れ，どう変遷していったか，その流れを大雑把に見ることである．

2.1　関数概念のはじまり

デカルトやフェルマーが創始した解析幾何学の核心は，曲線という幾何学的対象を方程式という代数的対象と対応させたことにある．つまり，x, y というふたつの未知数を含む方程式 $f(x, y) = 0$ には平面曲線が対応し，逆に平面曲線は必ず，$f(x, y) = 0$ という形に書くことができる，という事実の発見である[1]．この発見から変数概念が芽生え，次第々々に成長してゆく．しかし，変数の概念も関数の概念も明確にとらえられていたわけではない．いわば漠然と把握されていたということである ([98])．今日我々が関数[2]を表すのに使う単語 function［英語］を数学的な言葉として最初に用いたのはライプニッツである．彼の用いたラテン語 functio は「機能（を果たすこと)」という程度の日常語の延長であるが，これを彼は数学的な用語として1670年代から使い始めたのである．もっとも，最初のころはかなり限定的な用法であり，現在の意味とはずいぶん違うものを意味していた．ライプニッツ著作集第3巻 [68] には次のような言葉が現れている．

> ［43ページ］すべての逆接線問題は三つの直線，すなわち座標線 CB，CH と CT の間の関係，あるいは代わりとなる別の関数の間の関係に還元しうる．
> ［60ページ］さらに別の方法で，私は真数から対数，弧から正弦または余弦または正接，その他の関数を，無限級数を用いて見出した．
> ［66ページ］しかし，軸上の切り取られた部分 AT に対する接線 TC の関数が与えられている時に（すなわち線に対して垂直な円が秩序正しく与えられている時に）線 CC を見出すことは他の方法に属して

1　数学史家ボイヤーは [98] の75ページにおいてこの発見を，数学の歴史の中で最も重要な記述の一つと賞賛している

2　我が国では，従来「函数」という字句を用いていたが，漢字制限の趨勢で現在は「関数」を用いるのが一般的である．

いて…

つまり曲線上の点の位置を指定する線分（いわば x 座標）に対して，接線影（いわば接線の x 切片）や法線影（いわば法線の x 切片）などをその functio と呼んだのである．確かにこのようなものなら，それぞれの特定の「機能」と呼ぶことには共感できる．このように，ライプニッツは関数という言葉を使っていたけれど，関数概念が彼の数学の核心に位置付けられていたわけではない．

他方，ニュートンの方は，関数概念に近いものとして genita (generated quantity) のような言葉を使う場面もあったが[3]，ニュートン自身が統一的な関数の概念化の必要性を感じていたと推定する明確な根拠はない．ニュートンにとっては，時間とともに変化する量（いわゆる変数）の間の関係に対して，彼の流率法の適用を具体的に展開することが目標であったということであろう ([535])．

このように，現代の目から見ると，実に意外なことに映るのであるが，ライプニッツもニュートンも微分積分の理論を明確な関数概念の上に展開したわけではない．関数概念もなしに微積分学をどう展開したのであろうか．今日の目から見ると不思議に映るが，実は彼らは，具体的な平面曲線に対して微積分の手法を開発・展開したのである ([43, 136])[4]．微分学の史上初めての教科書は 1696 年に公刊されたロピタル[5]のもの ([194]) であると言われている．そのタイトルが『曲線理解のための無限小解析』[6]であることにも微積分法の研究対象が曲線であったことが象徴されている．また，初期の微積分学の貢献に大きな役割を果たした雑誌 Acta

3 プリンキピアの Book II の補題 2 に続いて，次のように述べている（[213]（コーエン他訳）の 646 ページ）:「余が生成されたるもの (genita) と呼ぶのは，任意の諸根すなわち諸項から加法と減法なしに生成されたる量のことである．数論においては乗法，除法，冪根によって生成される量，幾何学においては積や根，比例式の項や平均を見い出すことで生成される量である．積，根，長方形，正方形，立方体，平方根，立方根などなどのような諸量のことである.」つまり，現代の言葉で言えば，単項式のことである．ニュートンは，彼の理論において重要な役割を演ずる級数を形成する最も基本的な単位としてこの「生成されたる量」という概念を必要としたのであろう．これが関数の定義だとすると線形の関数が除かれてしまうが，線形関数については微分しても何も得するところはないから除外したものと思われる．なお，上で数論と訳した原語は arithmetic である．算術と訳すのが我が国の伝統になっているが，ニュートンがここで念頭においているのはむしろ代数的記号法を用いた計算の分野である．また，「根」と訳した原語は root であり，どう翻訳しても違和感を否定できないが，おそらくは 1 次方程式の「根」に由来する割り算の「商」を意味していたのではないだろうか．

4 平面曲線は，現代的には関数 $y = f(x)$ のグラフ，あるいは陰関数 $F(x, y) = 0$ のグラフであるから，彼らが実質的には関数を使っていたと主張したくなる読者もおられよう．しかし，それは現代人の目からそう見えるというだけである．そういう現代人には，我々がそのグラフを描くこともできないような関数すら知っていることを指摘すれば十分であろう．当時の微積分法の目標は，簡単な数式で表現できるような曲線のもつ諸性質の探求であったのだ．

5 Marquis de L'Hopital (1661-1704). [194] の第 2 版では L'Hospital とつづられており，それ以外のつづりもある．[112] の 12 章参照．

6 原題は，*Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes.* [605] にその一部が解説されている．また，英訳が [245] にある．

Eruditorum には，様々な問題が挙げられているが，その多くは「…という性質を持つ曲線は何か？」といったものである[7].

微積分法を，具体的な曲線についての計算手法からより一般的な学問的方法として成長させる上で関数概念の重要性に注目したのは，ヨハン・ベルヌーイ[8]やオイラーである．1718年，ベルヌーイは関数を次のように定義した（[86] の第2巻の241ページ）．

> 我々がここで，ある変数の関数と呼ぶのは，この変数といくつかの定数から何らかの仕方で組み立てられた量のことである[9].

ここで，現代の読者にとってわかりにくいのは，「何らかの仕方で組み立てられた」という表現であろう．直訳すれば，「いかなる仕方であれ，とにかく合成された」となるのであるが，そういってみても内容は理解困難であろう．要するに，変数（たとえば変数 x）と任意の個数の定数から，四則やべき根，初等関数，…，あらゆる合成手段を駆使して得られたものを変数 x の関数と呼ぼう，ということである．

ベルヌーイのこの定義が現れる論文 [300] は，等周問題に関する注意と題しており，彼はこの関数の定義を使って等周問題を定義する．与えられた周を持つ曲線の中でそれが囲む面積が最大となるものを求めよ，というのが等周問題のひとつであるが，それを一般化する際に関数の概念を定式化する必要を感じたのである．

この論文には，関数を表す記号として ϕ が使われ，現代の我々ならば $\phi(x)$ と書くところを，彼は ϕx と書いていた．単なる言葉が使われたのではなく，その言葉が別の言葉でより正確に定義され，さらにそれを使いこなすための記号まで導入されたとき，概念が理論的に認知されたといって良いであろう．近代解析学における関数概念の成立を我々はここに見る．

---

7 たとえば，ヤコブ・ベルヌーイが1690年に懸垂線の正体を求める問題を掲げ（[297] の219ページ），翌年にヨハン・ベルヌーイ，ホイヘンス，ライプニッツが Acta Eruditorum で解答を与えるなどというのがよい例である．

8 Johann Bernoulli (1667-1748). バーゼル大学の学生だったオイラーに数学を教えた．

9 ここでは，現代的な用語として定着している「変数」,「定数」を訳語として採用しているが，原語を忠実に訳すならそれぞれ「変化し得る量」「一定の量」となる．「実数」という用語で「量」を数の一種として見なす流儀が確立するのは驚くべきことに19世紀後半であり，それ以前は，常に「量」という表現が一般的であったが，それは「量」と「数」を峻別する伝統が生きていたということではない．むしろ，「量」をあたかも「数」のような演算対象として扱うのが近代数学の出発点であったことは前章で触れた通りである．

2.2 本格的な解析学の誕生——オイラーの登場

オイラー[10]が1748年に出版した『無限解析序説(*Introductio in Analysin Infinitorum*)』[137]は，無限小解析と呼ばれることも多かった微積分法の先に拡がる広大な近代的解析学の世界を鳥瞰的・体系的に解説したものであり，この領域における標準的指導書として多くの読者を得たと言われている[11]．その意味で，「解析」という用語の現代数学における意味・用法もこの書物が出発点の一つとなったと言ってよい．

ところで，上で見たように関数という言葉はすでにオイラーの師であるベルヌーイによって使われていたが，オイラーの『無限解析序説』ではその冒頭に関数が全面に押し出されており，ここから関数が解析学の揺るぎない主役になったと言って良いであろう．あまりにも有名で，しかも数学史的にも重要なものなので，ここでは例外的に原文を引用しよう．

> **定義 2.1** *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.* ([137] の 18 ページ)
>
> 「ある変数の関数とは，その変数といくつかの数，すなわち定数を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表現のことである．」

これは上に挙げたベルヌーイの定義を踏襲したものであると言ってよかろう．異なるのは，ベルヌーイが「量」と言ってすませていた部分を「解析的表現」と詳細化した点だけである．

後でオイラーの2番目の定義が現れてくるので，我々は上の定義を便宜的に**[オイラーの関数の定義 1]** と呼ぶことにしよう．

---

10 Leonhard Euler (1707-1783).

11 数学史家ボイヤーは次のように述べている：古代における最も有力な数学の教科書を挙げるのは容易である．ユークリッドの『原論』はその時代以来初等幾何における典型であり続けている．中世における最も印象的な教科書を挙げるのはそれに比べると難しい．しかし，アルファーリズミーのアルジャブルは良い一例ではある．その書籍から代数学が起こり，またその名前 (Algebra) も付いたのであるから．これらに匹敵する影響力や知名度の本を挙げることができるだろうか．デカルトの『幾何学』やニュートンの『プリンキピア』，あるいはガウスの『数論講義』を挙げる人もいるかも知れない．しかし，教育的な意義という点では，これらの古典は，オイラーの『無限解析序説』には及ばない．実際，この書物で，オイラーは，ユークリッドとアルファーリズミーがそれぞれ総合幾何学，代数学において成し遂げたものを解析学において成し遂げたからである．座標幾何，関数概念，そして微積分法は 17 世紀に登場していた．しかし，1748 年に，これらを一つにまとめ，幾何学，代数学，解析学という三頭体制の第三要素に仕立てたのは，『無限解析序説』に他ならない ([316])．

ところで，「組み立てられた量」を「組み立てられた解析的表現」と一歩詳細化させているが，その意図を明確に断定する材料はない．「解析的」や「表現」の概念的な定義はなく，代わりに $a+3z$ や $az+b\sqrt{a^2-z^2}$ などを z の関数の例としてあげ（a や b が定数であり z が変数である），引き続き，

> 関数は代数的関数と超越的関数に分割される．代数的関数というのは，代数的演算のみを用いて構成される関数のことであり，他方，超越的関数というのはその内部に超越的演算が含まれる関数のことである．

と述べていることから，結局は，数学的に定義される変数を含む明示的な式のみを関数と考えている，と断定したくなるが，その後で彼は，陰関数や多価関数についても言及しているから，彼の定義の意味を正確に読み解こうとしても，オイラーのもつ天才特有の多面性・弾力性に振り回されるばかりである．

歴史評価として最も重要な点は，**ここで確立された関数概念が「式」を基礎としたものであり，我々がよく知る「対応」に基づくものではなかった**，ということである[12]．きわめて代数的な定義であるという言い方ができる．

ただし，オイラーが念頭においている「式」が，今日の我々がすぐに連想するものほど狭くないことにも，読者の注意を向けておきたい．そもそも [137] の入門書的性格からいって，定義 2.1 では，表向きの主役は，多項式，指数関数，三角関数，対数関数，べき級数が関数であるとしても，オイラーは陰関数，特に逆関数も関数と認めていたことに留意する必要がある．f が関数ならばそれには原始関数（逆微分）が存在することも，暗黙のうちに仮定されていたから，「関数に積分操作をしても関数になる」ことも彼には自明のことであった．そもそも，オイラーはゼロ次ベッセル関数を定義しているから，常微分方程式の解として定義されるものも当然関数であった．「解析的表現」は実に多様であったのである．

関数が式で与えられることのいわば必然的な結果として，関数の定義域の概念はない．言い換えれば，それぞれの関数は，自然な定義域の中で考えられていた

---

12 ユシュケヴィッチ [636] によると，関数を解析的な式として定義した最も古い文献は 1667 年のグレゴリー (James Gregory (1638-1675))．いわゆる，グレゴリー－ライプニッツ級数 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ で有名）の本 *Vera circuli et hyperbolae quandratura* であるという．実際，[636, 358] によると，この中に定義 5 というのがあって，その意味するところは

> ある量 x が別の量 $a,b,\cdots$ から四則演算，べき根をとること，あるいはその他思い浮かべることができる演算からできあがるときに x は $a,b,\cdots$ から合成されていると呼ぶ．

だそうである．その他の思い浮かべることができる演算とは，グレゴリーにとってはかなり一般的な無限の操作であるという ([636, 358])．関数という言葉はないけれども，関数概念の萌芽であるということはできよう．

のである．つまり，式の中に代入して意味がある限り，何を持ってきてもよかったのである．後にやや詳しく述べるフーリエには定義域の原初的な考え方が見られる[13]が，定義域の概念の重要性が認識され，定義域のもっと完全な概念ができるのは 19 世紀も後半である．

2.3 振動弦論争

「関数 = 式」という近代解析学の古典的なパラダイムが崩壊する大きな契機となったのは，今日「振動弦論争」の名で知られる著名な数学者の間での議論の応酬である ([96, 610])．これはきわめて重要なできごとであるので，少し詳しく触れておきたい．

振動弦の問題とは，「両端が固定された長さ l の一様な弦を緩みのないように張って微小振動させたとき，その運動はどうなるか？」という問題である．この問題自体はテイラー[14]が 1715 年に考えていたし，他にもヨハン・ベルヌーイなども重要な貢献をしていた．しかし，この問題に革命的な展開を与えたのは，ダランベール[15]である．彼は，1749 年に公表された論文 [350][16]の中で以下のような理論を立てた．彼は弦の左端から x の距離にある点が，時刻 t において，平衡の位置から変位 y だけずれているとしたとき（図 2.1 参照），t, x, y の間に（現代流の記号で表せば）

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

という関係[17]が成り立つことを示した．数理物理学の問題が（常微分方程式ではなく）偏微分方程式を解くことに帰着されたのは，トゥルースデル [611] によれば，ダランベールのこの論文が史上初めてである．それまでのまどろっこしいやり方は忘れて，偏微分方程式にすべてを帰着させ，その解を求めればすべてわかる，というパラダイムを，史上初めて打ち立てたということができる．この意味で，[350]

13 フーリエ級数を考えれば，ある区間において一致しながら別の区間では一致しない関数がいくらでも作れるのであるから，式が，関数を全域に渡って定義するというパラダイムが崩壊するのである．

14 Brook Taylor (1685-1731)．テイラー級数・テイラー展開で有名なテーラーで，1715 年のことである ([253])．ダランベール以前の歴史については [105, 401, 611] を見よ．

15 Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)．ダランベールはオイラーとほぼ同期であったために彼と比べられてしまい，幾分損をしているが，科学者としては一流である．力学のダランベールの原理や，流体力学のダランベールのパラドクス，弦の方程式の解の公式（後述），など彼の発見は多い．[158] はダランベールの伝記である．

16 その一部の英訳が [247] および [241] にある．

17 a は弦の物理的な性質によって決まる定数．こうした偏微分の記号は，後世のものであり，彼の記号は別物である．しかし，彼の言わんとするところを現代の記号で書き直すとこうなる．

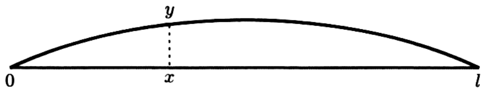


図 2.1 弦が静止状態にあるときに線分 $[0,l]$ になっているものとし，それを垂直方向に $y=y(t,x)$ だけずらす．

は時代を画するものであった．

ダランベールはさらに，関数 $y=y(t,x)$ が（2.1）を満たすことと，ある一変数関数 F と G が存在して

$$y=F(x+at)+G(x-at) \tag{2.2}$$

となることが同値であることを導く[18]．したがって，後は関数 F と G を決定することが問題として残る．ここで彼は，両端点が常に固定されているという境界条件

$$y(t,0)=y(t,l)=0 \qquad (0<t) \tag{2.3}$$

と，運動の初期条件

$$y(0,x)=0 \qquad (0<x<l) \tag{2.4}$$

を仮定することで，(2.2) が

$$y=F(at+x)-F(at-x) \qquad (\text{ただし，}F\text{ は周期 }2l\text{ の偶関数}) \tag{2.5}$$

という形にまで限定されることを示した．実際，(2.2) において，$x=0$ とおいたとき，$F(at)+G(-at)=0$ が常に成り立つことから，$G(x)=-F(-x)$ と表せるので，(2.2) は，まず $y=F(at+x)-F(at-x)$ と書ける．ここで，$x=l$ とおいたとき $F(l+at)-F(-l+at)=0$ が常に成り立つことから，F が周期 $2l$ の周期関数であることが導かれる．後は，初期条件 (2.4) により，$0\le x\le l$ に対して $F(x)-F(-x)=0$，すなわち，$F(x)$ が偶関数であることが導かれる．

このような特性をもつ関数として $F(x)=\cos\frac{\pi}{l}x$ をとれば，

$$y=\cos\frac{\pi}{l}(x+at)-\cos\frac{\pi}{l}(x-at)=-2\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi a}{l}t$$

---

18 彼の記述には，我々には少々読みにくい部分が含まれるが，上のように定式化された微分方程式を解くことは現代の我々にとって難しいことではない．実際，

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)y \quad \text{または} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)y$$

と変形するだけである．なお，ダランベールも含め，当時の人々は関数が微分できるかどうか悩むことはなかった（すべての関数は微分可能であった！）．これがこれから述べる振動弦論争の核心的問題となるのだが，そのことを無視すれば，(2.2) と (2.1) の形式的同値性は容易にわかる．

が得られる．これはダランベールよりも 30 年以上前にテイラーが得ていた解である．ダランベールが得意になったのは，テイラーの特殊な解以外に無限に多くの解を見つけることができたことであった．さらに，周期 $2l$ をもつ偶関数をとるごとにいくらでも解が得られるということから，「周期 $2l$ の偶関数をすべて決定する」という問題を除いては，振動法の問題を完全に解いたと考えた．

我々から見て意外なのは，周期 $2l$ の偶関数をすべて決定するという問題設定である．現代人なら，周期 $2l$ の偶関数は，無限に存在しうるので，その全体を決定することは，できるはずもないと考えるはずである．しかし，実は，上の問題提起の中にダランベールの関数の概念の外延を見ることができる．彼にとって，関数とは，変数の解析的な式で表現できるものに他ならなかった．ダランベールは $\cos\dfrac{n\pi}{l}x$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 以外に周期 $2l$ の偶関数一般を考えようとしたのである．ある意味では，フーリエ級数の先駆とも言えるが，むしろ実態は，ダランベールの関数理解が，『無限解析序説』で定義を与えたオイラーの 18 世紀的関数概念に忠実であったと見るべきであろう．

ダランベールは続く論文 [351] において，弦の初期条件が，$y \neq 0$ の場合も考え，弦の各点の初速度を与えれば弦の運動は完全に決定されることを示した．つまり，(2.4) に代えて

$$y(0,x) = \phi(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \tag{2.6}$$

という条件の下で，y が

$$y(t,x) = F(x+at) - F(-x+at), \quad F(x) = \frac{1}{2}\left\{\phi(x) + \frac{1}{a}\int \psi(x)\,\mathrm{d}x\right\} \tag{2.7}$$

と与えられることを示した．今日我々がダランベールの公式と呼んでいるものはこれに他ならない．

これに対してオイラーはダランベールの翌年に論文 [379] を発表して，偏微分方程式 (2.1) を現代のやり方に近い形で導出しなおした．さらに重要なのは，同論文の 22 節において関数 ϕ と ψ は「全く任意の関数」であってよいと主張したことである．全く任意の関数という表現は，18 世紀から 19 世紀中葉までは解析学の世界の一種の専門用語であり，「全く任意」がどの程度任意であるかが，時代とともに変化した微妙な概念である．ここでオイラーは，区分的に定義される関数，たとえば折れ線関数のようなもの（図 2.2 参照）を想定していたことに注意されたい．

この「拡張」に対し，驚くべきことに，ダランベールは異議を唱えたのであ

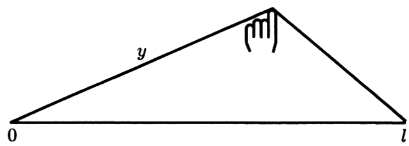


図 2.2 弦の 1 点をつまんで引き延ばした時の初期条件.

る[19]. 彼は，オイラーが考えている一般的な初期条件は，弦の中間の1点をつまんで離すような折れ線関数の場合を含んでおり，これが自然現象として存在することを認めるものの，区間全体に渡って単一の解析的表現を持たないから，この種の曲線に対しては，数学的解析が及び得ないとしてオイラーを批判したのである．微分も積分も具体的な解析的表現に対する演算に過ぎなかったから，解析的表現を持たない「全く任意の形」が，解析学の対象になりえないとしたダランベールの頑迷さは，歴史的立場から見れば論理的な純潔と言うこともできる[20]. その点で，オイラーは対照的である．彼は，2 年前の自己の著書『無限解析序説』において，関数を定義 2.1 と明確に定義しておきながら，いわば事柄の必然性に引かれるままに，その定義を拡張し，「区間ごとに違った式で表現される曲線」や「フリー・ハンドで描かれるような全く任意の曲線」までをも対象と見なすようになるのである．

繰り返しになるが，ニュートンやライプニッツ以来，微分も積分も，概念的な定義をもっていない式で表された関数（あるいは曲線）に対する計算に過ぎなかったのであるから，式で表現できないものに対して，式の表現を通して力を発揮してきた新数学 = 解析学は何かができるはずもない，と考えていたダランベールの主張は明快である．これに反駁しようとすれば，計算過程とは独立した微分・積分の概念化が必須となるのであるが，ダランベールの反論に対するオイラーの再反論はしばらく登場せず，十年ほど経過して再度ヒートアップすることになる．これについては [199] を見よ．

なお，上の「ダランベールの公式」には現代人なら首をひねる問題がもうひとつある．それは，弦の形状は $0 \leq x \leq l$ でしか定義されていないのだから ϕ も ψ も $0 \leq x \leq l$ でしか意味はないはずなのに，上の公式では $F(x)$ がすべての x について定義されることに対していかなる疑いも持っていないように見えることである．しかし，関数が「式」で定義されるという基本に立ち返り，関数に定義域は必要ないということを理解すれば納得できないことはない．オイラーにしても，基本は，

---

19 [352] の 358 ページ.

20 少なくともこの時点でダランベールは，上の折れ線には尖った点があり，そこで微分可能でない，ということを問題にしているのではないことは，特に注意する必要がある．彼が微分できない点が存在することを問題視したのはもう少し後のことであり，ここでは彼は純粋に，解析的表現である関数のみが数学の研究対象であると主張したのである．

「関数＝式」のパラダイムの中にいたということであろう．これは次に出てくるダニエル・ベルヌーイとの論争から示唆される．

この論争は1753年になってさらにややこしい局面を迎える．ダニエル・ベルヌーイ[21]が，このようなダランベールとオイラーの論争にまったく別の立場から介入したのである．1753年の彼の論文 [302, 303] は偏微分方程式も拒否し，数学的な主張と物理学的現象論がごちゃ混ぜになっていて読むのが難しいので，現代の記号を使って意訳することにする．[611] を参考にしてみると，次のような主張であることがわかる．彼は，振動弦がいわゆる基音以外にその倍音，三倍音，…を同時に発するという現象的な考察に基づき，

$$y = \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi a}{l} t \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

という特殊解を考えた．そして，それらの線形結合

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi a}{l} t$$

によって振動弦の運動がすべて決定されると主張した[22]．これこそが関数の歴史上で重要なポイントである．この形の関数が (2.1) の解であることはある意味で自明である．ベルヌーイの主張の自明でないところは，(2.1) のどのような解もこの形に書けると主張するところである．

ベルヌーイの主張は，後に述べるフーリエ級数論の先駆けでもあり，物理的現象を数学的な論証に組み込むという点でも，時代の精神を反映したものとして興味深い．彼はディリクレ境界条件と初期条件として $y_t(0, x) \equiv 0$ をとっているから，彼の主張は基本的に正しい[23]．しかし，このベルヌーイの解が一般解であるということに対してオイラーが反対したのである ([380])．もし上の解において，$t = 0$ とおけば

$$y(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

となり，これは弦の初期形状を与えるはずである．しかし，オイラーはすでに，全

21 Daniel Bernoulli (1700-1782). Johann Bernoulli の息子．流体力学から確率論まで幅広い数理科学の分野で研究し，父に匹敵する成果をあげた．親子の間で学問的な確執があったことでも有名である．

22 これは，今日的表現である．級数の記号が確立するのは 19 世紀後半になってからである．

23 もちろん，係数 a_n には何らかの制限条件が必要となるが，ベルヌーイはそれに無頓着である．その点は大目に見ておくことにしよう．

く任意の関数 $\phi(x)$ を初期形状にもつ弦についての一般解，つまり，ダランベールの公式 (2.7) を得ていたから，三角関数を使ったこの式が，全く任意の関数 $\phi(x)$ を表現しうるなどということはありえない，と考えたのである．三角関数という最も基本的な周期関数を加え合わせるだけで，一般の（つまり，与えられた区間を越えれば非周期的な）関数までが表されることなどありえないという判断は，オイラーだけでなくダランベールにも共通したものであった[24]．オイラーが気楽に任意の関数と述べているのは，区分的に異なる「式」で表現される程度の任意関数の世界を前提にすれば理解しやすい．一方，無限和といっても三角関数のみの和であれば有限和と同様の性質を持つはずだと思い込んでいれば，オイラーのベルヌーイに対する批判はごく自然なものであったのではないだろうか[25]．

振動弦論争は結局 1783 年にダランベールとオイラーが死ぬまで続くことになるが，ページ数の関係でこのあとの展開は割愛せざるをえない．[611] あるいは [199] を参照してほしい．

2.4 オイラーの新しい関数概念

この振動弦論争を経て，『無限解析序説』出版の 7 年後，オイラーは微分学の教科書 [139, 140] を出版した．ここで彼は，関数を次のように定義している（[139] の 4 ページ，[140] の序文 vi ページ）：

> **定義 2.2** このように，別の諸量に依存しているある量，つまり，他の諸量が変化するときに変化を受ける量はもとの諸量の関数と呼ばれる．この定義はかなり広く適用することができ，ひとつの量が他の諸量に依存する一切の仕方を含んでいる．従って，x が変数ならば，どんなふうにであれ x に依存する，あるいは x から決まる量は x の関数と呼ばれる．

これを便宜上，**[オイラーの関数の定義 2]** と呼ぼう．字面を追っただけだと，関数の概念がかなり広がって，「伴って変化する変数間の関係」という，現代的な関数の定義に接近しているように見える．しかし，書物に書かれた文面とそれを書いた著者が念頭に置いていたことが完全に一致しているわけではないことにも留意したい．そもそも，「伴って変化する」ことと「対応」との間には依然として大き

24 [353] において $y(x) = (\sin \pi x)^{5/3}$ は $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \cdots$ の線形結合では表せないと主張している．$y''(0) = \infty$ であるが，線形結合は常に $y''(0) = 0$ を満たすから，というのがダランベールの理由である．第 II 部第 7 章参照．

25 後で見るように，この障害を越えていったフーリエの仕事は，18 世紀的な解析学のパラダイムを突き崩す革命的な意義をもっていた．

な開きがあることを忘れてはならない．オイラーの関数の定義2の最も重要な前進は，「一つの解析的表現」では排除されていた，折れ線のようなグラフをもつ区分的に定義された関数が明確に許容されるようになったことである．

トゥルースデルが [610] の 62 ページで述べているように，オイラーは，さらに，

$$f(x) = \begin{cases} a & (x = x_0) \\ 0 & (x \neq x_0) \end{cases}$$

のような関数まで扱っていた[26]点を考慮すると，オイラーにはダランベールとは違った弾力性と先進性を感じずにはいられない．

オイラーの先進性に関してもう一つ指摘しておこう．流体力学の基礎方程式の導出に関する論文 [393] で，「オイラー方程式」と今日呼ばれる偏微分方程式[27]

$$\begin{gathered}
\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\right) \\
\left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dy}\right) \\
\left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dz}\right) \\
\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0
\end{gathered}$$

の解を関数であるとしている点である．常微分方程式の解を関数と見なすのはそう難しいことではない．実際，テイラー展開できればそれを関数と見るのは，「関数＝式」の延長上にあるからである．しかし，偏微分方程式の解はテイラー展開できるとは限らないし，できるとしても自明なことではない．オイラーはそうした級数展開に一切言及することなく，上記論文9節で，「空間の点の座標 x, y, z が与えられればそこにおける速度ベクトルの成分 u, v, w が定まる[28]のだから u, v, w は x, y, z, t の関数である」と断定している．事柄の本質に導かれて自らの定義を変容させていくオイラーの数学的才能の片鱗がここに見えるように思う．

しかしながら，解析的表現をもって関数の定義とする流儀は，オイラーの新しい定義の後も，ずっと使われ続ける．つまり，ふたつの定義が並立していたわけである．実際，1813 年に出版されたラグランジュの関数論の教科書 [186] でも，オイ

26 オイラーのこうした概念は 1765 年の彼の論文（*Opera Omnia* III-1，564 ページ）に現れている．

27 前に述べたことであるが，この頃にはまだ偏微分の記号 ∂ は存在せず，d を使って括弧で挟むことにしていた．(u, v, w) が速度ベクトルであり，p が圧力，ρ が流体の密度である．

28 オイラーはここで微分方程式の解の一意性をまったく疑っていない．

ラーの定義1が使われている．もっとも，ラグランジュが，無限小や極限を追放し，純粋に代数的な微分法の構築を構想した『解析的関数の理論』[29]は，関数が式の表現で与えられていなければ，そもそも代数的に議論を組み立てることのできるものでなかったことにも留意しよう．

2.5 フーリエの革命

「解析的な表現」と「区分的に定義された関数」の対立を解消し，18世紀数学のぶつかっていた壁を打ち破るきっかけとなったのは，フーリエ[30]である．彼は，熱の伝導現象を数学的に記述する方程式，現代の言葉で言う熱方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{2.8}$$

を提起し，それを解くために，全く任意の関数 $f(x)$ を，三角関数の級数

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.9}$$

の形に表現するという大胆な方法を提示し，成功させた ([145])．これを展開した彼の著書のタイトル『熱の解析的理論』[31]には，熱の物理的本性の解明ではなく，熱現象を「解析的」に記述することだけを彼が目指していることがよく現れている[32]．

関数概念の形成史において決定的な転機となったこの [145] はフーリエ級数・フーリエ変換を縦横無尽に駆使することで，画期的成功をおさめたのであるが，そこで彼は次のように関数を定義している：([145] の 416 節，英訳の 430 ページ)

> 一般に，関数 $f(x)$[33]は，次々と変わる値あるいは個々に任意であるような縦座標[34]を表す．横座標 x は無限に多くの値をとり得るから，縦座標も同じだけ多くの個数の値をとり得る．これらはすべて現

29 [186]，1797 年（初版）および 1813 年（改訂版）．

30 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

31 *Théorie analytique de la chaleur.*

32 (2.8) は現代的に言うならばモデル方程式である．19 世紀の初頭には熱の物理学的な本性はわかっていなかった．熱素という元素の存在もまだ信じられていた時代に「本質が何かは問わない．ただ，温度がどのように振る舞うのかが計算できればそれでよい」という数学的志向がかえって成功に導いたのである．

33 フーリエの記号では fx.

34 ordoné，横座標を意味する abscisse と並んで 19 世紀全般までは標準的に使用されていた．今風に $y = f(x)$ と書けば，横座標 = 変数 x の関数値 $y = f(x)$ が縦座標というわけである．

> 実の数値をもつ．それは正かも負かも零かも知れない．これら縦座標がひとつの共通の法則に従っているとはいささかも仮定しない．すなわち，それらは，任意の仕方で次々と変化して良いし，それぞれの個々の値は，孤立した単一の量であるかのごとく与えられても良い．

「関数がひとつの共通法則に従う必要はない」とは，関数を表す式が小区間ごとに異なっていてもよいということである．一般の関数概念に向けて，「オイラーの関数の定義 2」をさらに明確に前進させている．

なお，最後の一文は，あたかも各点ごとに任意に与えられてもよいという主張であるから，字面から判断すれば，対応としての関数概念を表明していると読める．しかし，後で述べるように，フーリエは実際には区分的に解析的な関数しか考えていない．概して，フーリエは明快な主張とは裏腹に，具体的な関数を取り扱う場面では保守的になるようだ．

ところで，(2.9) の右辺はまさに「解析的な表現」である．「全く任意の関数」がこのような単一の解析的表現をもつという主張は，(ベルヌーイの主張がオイラーやダランベールに退けられたように,) 当時の数学者たちの共通の了解から大きくはみ出るものであった．ここからフーリエの苦闘が始まるのである．実際，彼の著書 [145] は，当時最高の権威とされていたラグランジュに信用されず，15 年間も出版されなかった．

フーリエは，この新しい方法の正しさを「証明」するのに関数をいったんテイラー展開し，そのテイラー係数と a_n, b_m の関係を導くという方法をとっている．これに何十ページもかけており，フーリエ級数のその後の目覚ましい展開を知る我々から見ると，全く異様なエネルギーの無駄遣いにしか見えないが，その厖大な計算を通じた結論として，フーリエは，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \tag{2.10}$$

を得た．これで「全く任意の関数」$f(x)$ に対する「解析的表現」が決まったことになる．

いったん (2.10) が見つかってしまえば，これが正しいことを納得するのは簡単である．(2.9) の両辺に $\sin mx$ をかけ，両辺を $x = -\pi$ から $x = \pi$ まで積分する．ここで

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,\mathrm{d}x = 0$$

を用いると，

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$$

を得る．いわゆる項別積分である．同様にして，$\cos mx$ をかければ a_m を求めることができる[35]．

いずれにせよフーリエは (2.9)(2.10) の正しさを確信し，与えられたどんな関数 $f(x)$ に対しても，(2.10) によって $\{a_m\}$，$\{b_m\}$ を決定すれば，それらを係数にもつ級数 (2.9) が $f(x)$ を表す，と主張した．彼の主張は実は，途方もなく巨大なもので，これを正しく定式化し，厳密に証明するには 100 年以上かかることになる．これについては第 II 部第 6, 7 章で詳しく述べる．

ところで，フーリエの与えた証明には，いくつか問題があった．そのうちのひとつが，「全く任意の関数」$f(x)$ に対し，積分 (2.10) がどのように定義されるか，という問題である．微積分法の偉大な発見以来，積分は微分の逆演算すなわち反微分 (anti-derivative) と同一視されてきたが，そのような演算に基づく定義では，フリーハンドで表されるような曲線をグラフにもつものまで許容した「任意の関数」に対して積分を考えることは必ずしもできないのである[36]．フーリエはこれに対し，定積分の概念を，面積によって与える，という「逆転の発想」を提起することで，この難点をカバーしようとした（[145] の 220 節）．いかなる曲線に対してもそれが囲む領域の面積は存在するはずであるから積分値が求められる，というフーリエの主張は，計算，すなわち解析的方法の普遍性を素朴に信じていた 18 世紀数学のパラダイムの終焉を示唆するものである．しかし，同時に，全く任意の関数と言いながら常に面積が考えられると主張していることは，彼が考えていた「全く任意の関数」が，現代数学で考えられるものほど一般的なものではなかったということもさらけ出している．言い換えれば，フーリエの関数の定義は，文面上は，後にディリクレが挙げる例のような関数まで想定していたようにも見えるものの，実際には，その外延はそれほど広くはなかったということである．つまり，彼の念頭にあった関数は，有限個の小区間（小区間は 1 点に縮退していてもよい）に分けて，その各々では解析的表現で与えられるにせよ，グラフで与えられるにせよ，面積を考えることのできる程度に滑らかな関数であったと判断せざるを得ない．小

35　これは現代のどのフーリエ級数の教科書にも載っている論法であるが，フーリエ自身は，これを第一証明と位置づけてはいなかった．このことは，十分留意に値することである．

36　18 世紀の数学では関数 $f(x)$ が与えられたとき，$F' = f$ となる関数 F の存在を直感的に認め，$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ の左辺をもって右辺の定義とする．そしてこれが面積に等しい，と論を進めるのである．フーリエは F を経由せず，$f(x)$ が囲む面積をもって $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ の定義とするのである．この発想は後のコーシーにも引き継がれる．

区間への分け方は完全に任意，小区間上の表示は全く任意，という意味での「全く任意な関数」であったということであろう．そうでなければ220節のように任意の関数のグラフが囲む曲線が面積を持つ，というようなコメントはしないはずである．

フーリエの本の中には「全く任意の関数」という言葉は頻繁に登場する．たとえば418節でも，

> 関数 fx は全く任意の関数，すなわち，単一の法則に従うものであろうとなかろうと，0と任意の値 X との間に含まれるすべての値に対応する一連の値のことである．

とあるが，現代的な定義が彼の念頭にあったと思ってはならない．

ここで，もう一つ注目しておきたいのは，x の変域を $0 \leq x \leq X$ なる[37]任意の x に対応して，と述べており，それ以外の x の排除を明確に打ち出していることである．解析的表現としての関数 $\varphi(x)$ と，同じ $\varphi(x)$ のある区間上のフーリエ級数がその区間の外部では一般に異なるという数学的知識に基づくものに違いないが，ここに定義域の考えの原始的な形を見ることができる．彼は定義域という言葉こそ使っていないが，定義域というものを意識しているとおぼしき表現がここだけでなく随所に見られる．

数学史家のグラビナー[38]は

> 導関数はまず最初に使われた．そして，発見され，探求され，発展された．その後になって初めて定義されたのである．

と述べている [430] が，定義域も同じように，論理的な定義を受けるずっと前に，いわば数学的な必要性に導かれて使われ始めたのである．

時代を少し下ってコーシーによる関数の定義を読んでみよう．コーシーは，解析学の厳密化の創始者という評価が我が国でもあまりに支配的であるが，彼が，常に厳密性や論理的定式化を優先する思想の持ち主であったわけではない．関数概念に関する，コーシーの説明を見てみよう ([107, 108])．

> いくつかの変数の間に，その中のひとつの値が与えられたとき，それから他のすべての変数の値を決めることができるような関係があったなら，通例に従い，これら様々な変数が，そのうちの一つを用いて

37 フーリエの時代には「間に入る」と表現される場合は，両端点を含む方が概して多いが，この場面では $0 < x < X$ と解釈しても大きな違いはない．

38 Judith Victor Grabiner (1938-).

> 表される[39]と考える．このひとつの変数は「独立変数」という名前をもつ．そしてこの独立変数を用いて表される他の変数は，この変数の関数と呼ぶところのものである．

独立変数という概念の導入がまず目を引くが，この定義のもう一つの数学史的なポイントは従来「変化する量」と呼ばれてきたものに対して，今日変数を意味するのに使われている variable という言葉を導入したことである．他方，定義の書き出しは，変数間の従属関係を，式での表現に限定しないように注意しているように我々には見えるものの「独立変数で表されていると想定し，それが従来関数と呼ばれてきたものである」と結論するに至っては，やはり「伴って変化する量」の域を大きくは出ているとは言えまい．実際，コーシーは，上の記述に従って，そっくりの記述で独立変数が複数存在する関数の説明を与え，例として $\sin x, \log x, \cdots$ などは x の関数，$x+y$ や $x^y, \cdots$ は x, y の関数，xyz は x, y, z の関数などとして列挙している[40]．なお，独立変数という概念を強調していることについては，ニュートンが，すべての変化量を時間変数 t の関数としてとらえようとしたことを意識してのことかもしれない．

2.6 ディリクレの解析学への貢献とその影響

現代的な関数概念は，フーリエ級数の厳密な再構成と平行して進んだ．我々が今日，大学の数学の講義で習う関数の定義はディリクレ[41]に始まる．

ディリクレは，『三角級数の収束について』という有名な論文（[364]，1829 年）において，「全く任意の関数」がフーリエ級数に展開できるという定理を初めて厳密に証明した．彼の証明した結果を現代的な言葉で簡単に述べると，「有限個の例外点を除いて区分的に連続[42]で，かつ，区分的に単調な関数のフーリエ級数は，もとの関数に[43]に収束する」ということになる．

「全く任意の関数」をフーリエ級数で表す，という目標からは一歩譲って，上のような制限条件付きで証明したのであるが，当時フーリエ級数展開の対象として使われていた関数はすべてこの制約条件を満たすものばかりと言って良いような情況

---

39 exprimée.

40 [107] でも [108] でも以上の記述をまったく同じに繰り返していることから判断すると，コーシーがこの定義を気に入っていたと言ってもよいであろう．

41 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

42 関数の連続性はディリクレより少し前に，ボルツァーノとコーシーが独立に定式化している．ディリクレはパリへ留学しているから，当然その概念を知っていたのである．

43 不連続点では両側の片側極限の平均値に収束する．

であったから，老フーリエにとってもディリクレの仕事は十分に満足のいくものであったろう．

しかし，ディリクレは彼の結果に完全に満足した訳ではなかった．有限区間に極値が有限個しかないという制約条件は取り除けると考えていたらしい（[118] の 10 ページを見よ）．しかし，制約条件をさらに緩め「全く任意の関数」に拡げるためには，従来から続いてきた解析学の基礎概念を再構築することが必須であると感じていた．と同時に，いかにその方向で努力しても達成することのできない関数が存在することにも気づいていた．彼がそのような関数の例として挙げたのが，c と d を異なる定数とし，

$$f(x) = \begin{cases} c & (x\text{ が有理数}) \\ d & (x\text{ が無理数}) \end{cases}$$

という，今日でも有名なディリクレの関数である．

オイラーもフーリエも「全く任意の関数」という表現を気楽に使っているが，実際に使っているのは，区分的に解析的な関数のみである．つまり，独立変数が動く範囲を有限個に分けて，その各々では解析的表示ができるようなものを念頭に置いているわけである．

これに対しディリクレは「全く任意」というのはとてつもなく変なものもあり得るということを実例を挙げてはっきりと主張したという点で歴史を画する仕事を残した．このように，現代的な対応としての関数の概念はディリクレに始まるといってよい．

1837 年，やや後になって，ディリクレがふたたび書いた『正弦・余弦級数による全く任意の関数の表現について』という論説 [365] において彼は，

> a と b をふたつの確定した値とし，x は a と b の間の任意の値をとることができる変量とする．さて，任意の x に対してただひとつの有限な y が対応し，しかも，x がこの区間を a から b まで連続的に掃過するときに $y = f(x)$ もまた少しずつ次第に変わってゆくならば，y はこの区間における x の連続関数[44]と呼ばれる．ここで，y が x にこの全区間に渡って同じ規則に従う必要はないし，数学的な演算で表現される単一の依存関係を考える必要もない．

連続関数の範囲内であるが，ほぼ現代の関数の定義であるといってよいであろう．

---

44 ディリクレは「連続」を説明するのに stetig というドイツ語とラテン系の continuirliche という用語を繰り返している．

ユシュケビッチ [636] によると，ロバチェフスキー[45]が 1834 年に，現代的な関数の概念に到達しているということである．

> 一般的な枠組みとしては，x の関数と呼ばれるのが，それぞれの x に対して定まり，x とともに少しづつ変化するような数のことであるということが必要である．この関数の値は，解析的表現で与えることもできるし，すべての数をテストして，その中の一つを選ぶという手段を与える条件によって与えることもできる．あるいは究極的であるが，従属関係が存在するが，それがいかなるものであるかは知られないまま，というものでもよい．

x の変化に対する $f(x)$ の変化を述べる部分に残る表現を見ると，真に現代的な概念に達していたかどうか，判断に迷うところもあるが，最後の部分には，ディリクレ以上に明確に，純粋な対応としての関数概念が表明されていると読みたくなる．地理的に離れたディリクレとロバチェフスキーが，ほぼ同じ時期に同じようなアイデアに到達していたとすれば大変興味深い．

ところで，こうした現代的な関数の定義は一挙に定着したのであろうか？ 決定的に斬新な定義が提唱され，そのもとで新しい数学の展開が可能になっていくようになってからですら，昔からの「伝統」が無批判的に踏襲される，という現象は，論理を謳う数学においてもしばしば見られるところである．対応に基づく関数の定着にしても，一挙に浸透したわけではない．1842 年に書かれたド・モルガンの微積分学の教科書 [123] では次のようになっている：

> その文字に関して微分をとることになる文字は，独立変数と呼ばれる．となると，微分される表現は従属変数と呼ばれるべきということになる[46]．しかしこの言い回しが必須とは思えない．いかなる仕方であれ，x を含む，あるいは x の値にその値が依存するあらゆる表現は，x の関数と呼ばれるのである．

つまり，ド・モルガンは関数を変数 x を含む式と同一視する 18 世紀の定義で満足していたのである．

以上に紹介した話と比べると，時代的にはかなり後にはなるが，1934 年に出版

---

45 Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1792-1856)．非ユークリッド幾何学で有名．

46 この部分は微分の説明として理解しなければならない．「微分される表現」とは独立変数 x に従属する変数，すなわち x の関数である．

された藤原松三郎[47]の微分積分学の教科書（[52] の 80 ページ）には，集合と対応に基づく現代的な関数概念が明確に打ち出され，しかも短いながら式にこだわっていた 18 世紀以前の歴史まで触れている．

> 茲ニ實數ヨリ成ル或一ツノ集合 (A) ヲ考ヘル．例ヘバ，アラユル實數ノ集合トカ，區間 (a,b) 内ノ（即チ $a<x<b$ ナル）實數 x ノ集合ナドヲ考ヘル．(A) ニ屬スル各ノ實數 x ニ對シテ，一ツ或ハ一ツ以上ノ y ノ値ガ對應スル場合ニ，y ヲ x ノ (A) デ定義サレタ函數トイヒ，記號
>
> $$y=f(x),g(x),\varphi(x),\psi(x),\cdots$$
>
> 等デ表ス．集合 (A) ノ各ノ數ヲ代表スル x ヲ變數トイフ．之ニ對シテ一定ノ値ヲ表ス數ヲ常數トイフ．x ノ一ツノ値ニ y ノ唯一ノ値ガ對應スル場合ニ，y ヲ x ノ一價函數ト名ヅケル．ソレ以外ノ場合ニハ多價函數トイフ．
>
> …
>
> 上述ノ函數ノ定義ハでぃりくれガ十九世紀ノ頭初ニ與ヘタモノデアル．元來函數ナル言葉ハらいぷにっつニ始マルガ，十九世紀ニ入ルマデハ專ラ一ツノ式デ表サレ得ルモノニ限ラレ，極メテ狹イモノデアッタ．

我が国の数学者が「洋算」の先端的成果を，それに至るまでの歴史とともにとらえていたことは，実に感銘深い．

* * *

演習問題

[問題 1] ✿✿✿ 現代では，代数関数を次のように定義する：$a_j(x)$ $(j=0,1,\cdots,n)$ を x の多項式として

$$a_0(x)Y^n+a_1(x)Y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)Y+a_n(x)=0$$

の根として得られる関数 $Y=Y(x)$ を代数関数と呼ぶ．そうした表示ができない関数は超越関数である．これとオイラーの定義 2.2 を比べてみよ．現代の定義では $y=x^\pi$

47 藤原松三郎 (1881-1946) は東北帝国大学教授で，人生の前半は純粋数学の研究に従事し，後半では和算の研究で我が国の科学に大きく貢献した数学者である．

は超越関数である．オイラーはこれをどう見ているか？（[137] の 7 節）

[問題 2] ✿ 1691 年に書かれたと言われているヨハン・ベルヌーイの微分学の教科書 [87] には次の問題が挙げられている．これはいわゆるフェルマーの原理に関する問題である．図 2.3 において，旅人が左下の隅から右上の隅まで旅をする．長方形 ABDF は平らで歩きやすいところであるとし，一定の速度 $v_1 > 0$ で歩くことができる．長方形 BGED は荒れた土地で一定の速度 v_2（$0 < v_2 < v_1$ とする）でしか歩けないとする．このとき，A から E まで最短時間で進むにはどうすればよいか？ 最短経路では図の角 $\alpha = \angle \mathrm{ACF}'$ と $\beta = \angle \mathrm{ECE}'$ に

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \tag{2.11}$$

の関係があることを証明せよ．

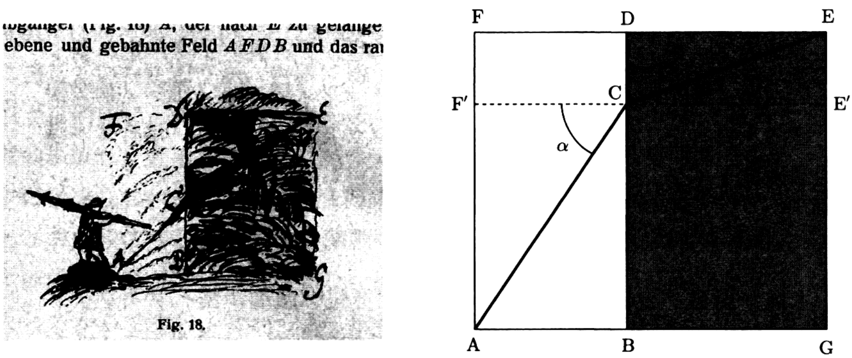


図 2.3 左：ベルヌーイ手書きの図（[87] より）．左下隅に棒のようなものをかついでいるのが旅人である．右：それを抽象化したもの．図の AGEF は長方形．F′E′ は FE に平行で，BD は AF に平行とする．

[問題 3] ✿ ライプニッツが彼の微分に関する研究を初めて公表したのは 1684 年のことである（[68]）．この論文の最後で彼は前問で挙げたフェルマーの原理を取り上げ，彼の方法ならば簡単に解けると誇らしげに書いている．さらに彼は，次の問題（ド・ボーヌの問題と彼は呼んでいる）を考える．図 2.4 において曲線 UWV 上の点 W から水平軸に垂線をおろし，その足を X とする．W で接線を引き，水平軸との交点を C とする．このとき，点 W の位置にかかわらず線分 CX の長さは一定であると仮定する[48]．このとき曲線 UWV はどのようなものか？

これが指数関数 $y = a^x$ で表される曲線になることを証明せよ．

48 CW が接線なので，CX は接線影 (subtangent) と呼ばれる．問題は，「接線影が一定な曲線は指数関数の表す曲線である」ことを示すことにある．

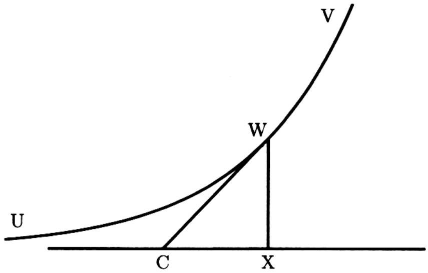


図 2.4 ド・ボーヌの問題．CX が一定になる曲線 UWV はどのようなものか？

[問題 4] ✿✿ テイラー級数とヨハン・ベルヌーイの級数．1694 年，ヨハン・ベルヌーイは

$$\text{Integr. } ndz = nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3 ddn}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4 dddn}{1.2.3.4.dz^3} \ \&c$$

なる公式を発表した．ここで，Integr. は現在の積分記号に相当し，n は z の関数である（ヨハン・ベルヌーイの全集 [86] 第 1 巻．125-128）．現代的な表記をすると，

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \frac{x^2}{2!}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{x^3}{3!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x^4}{4!}\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} + \cdots . \tag{2.12}$$

である．これを証明せよ．収束など考えずに，形式的な証明のみでよい．関数として $f(x) = 1/(1+x)$ をとると，ベルヌーイ級数は何を与えるか？

[問題 5] ✿✿ オイラー [377] はテイラーの定理

$$F(x+a) = F(x) + \frac{a}{1}F'(x) + \frac{a^2}{2!}F''(x) + \frac{a^3}{3!}F'''(x) + \cdots$$

からベルヌーイの級数（2.12）が得られることを示した．読者はその証明を想像せよ．

[問題 6] ✿✿✿ テイラーの定理とベルヌーイの級数が形式的には同値であることを証明せよ（[401, 426, 567]）．

[問題 7] ✿✿ テイラーが 1715 年に（[253]）考えた微分方程式 $(x+y)y'' = (1+y')y'$ が求積法で解けることを示せ（テイラーはテイラー級数の応用として微分方程式の解を級数で表すことによって得ることを挙げていた [401]）．

[問題 8] ✿✿✿ ヤコブ・ベルヌーイが 1690 年に Acta Eruditorum で挑戦を募った問題に，懸垂線がある．これは，垂直な平面内に任意の 2 点をとって，これらを端点として鎖を吊るしたとき，その鎖の形を決定せよ，という問題である．これが a, b, c, d を定数として $y = a\cosh(bx+c) + d$ という関数で与えられることを証明せよ（2 点は 1 本の鉛直線上にはないものと仮定する）．

[問題 9] ✿✿ ヨハン・ベルヌーイは 1697 年，[298] において $y = x^x$ を考えた．このグラフは図 2.5 のようになる．彼は，現代の言葉で書けば，

$$\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

を証明している．これを証明せよ．また，この関数 $y = x^x$ の $0 < x$ における最小値を達成する x の値を求めよ．

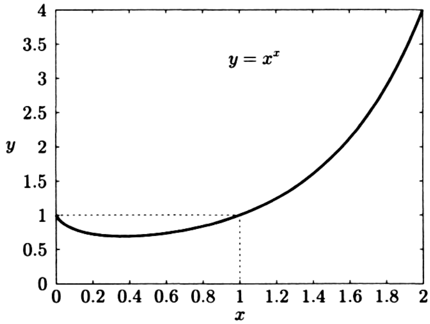


図 2.5 $y = x^x$ の $0 \leq x \leq 2$ におけるグラフ．

[問題 10] ✿ 関数という概念に最初に到達したのは誰か？ この問題に対する答えとしては，(1) ニュートン，(2) ライプニッツ，(3) ヨハン・ベルヌーイ，(4) オイラー，(5) ディリクレが考えられる．この答えにはいずれもなにがしかの正当性があることを確かめよ．

[問題 11] ✿✿ ハリオット（前章参照）の原稿の中に次の問題が見える ([514])．微積分学が現れるよりもずっと前のことであるが，読者はこれを微積分を用いて解いていただきたい．図 2.6 のように，円周上の点 A が第 4 象限に与えられているものとする．点線で表されている直径よりも上の円周上に点 X をとり，直径との交点を Y とする．このとき XY の長さを最大にする X の位置を求めよ．

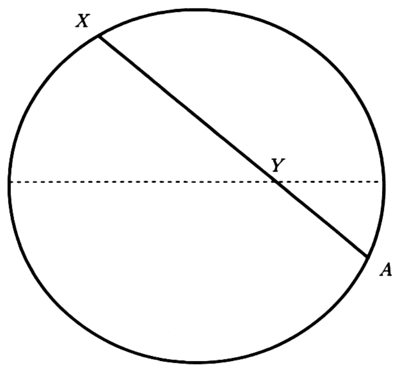


図 2.6

第３章　微積分法の合理化と極限概念

3.1　基礎を欠いた微積分法？

高校以下の数学と大学数学との「断絶」について語られるとき，最も一般的に引かれる例の一つが，いわゆる ϵ-δ 論法であろう．高校までの数学の伝統の中で特に問題を感ずることなく生きてきた，入学したての大学生が最初にこの論法に触れたときに感ずる違和感は当然とも言える．極限という概念は，「限りなく近付く」といった，変数の直観に訴える日常表現に頼ってすませていたのである．「それではすまない．極限の概念を厳密な数学の言葉で定義することが，微積分学全体を厳密な理論として再構築する出発点である．」と納得することが初学者には難しいためであろう[1]．今日の目から見ると意外かもしれないが，近代の微積分法は，厳密に定式化される極限概念の導入以前にすでに大きな進歩を遂げていた．しかし，「無限小 (infinitesimal)」まで包含するほど広い意味で考えるなら極限概念は初期の微積分法で重要な役割を演じていた．ニュートンには，曖昧な無限小を何とか排除したいという意識があったようで，「無限小」や「モーメント」のような近世数学的な概念を使いつつも，「流量 (fluent)」の時間的な変化として「流率 (fluxion)」という概念に基づく計算方法を導入したり，さらには「消滅するものの究極の比」「生まれ出ずるものの原初の比」など $\lim_{t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ を連想させる表現まで考案している．また，ニュートンの『プリンキピア』の中には我々の目から見ると，ϵ-δ を彷彿とさせる補題もないわけではないが，微積分法の基礎にある概念と基本公式を，ときには計算で，またときには図を使った幾何学的な説明で何とか正当化できるようなレトリックの工夫にとどまっており，我々の目には結局のところ堂々巡りになってしまっているように見える[2]．そもそもニュートンの微積分法を特徴づける基本概念である流率は，時間につれて流れるかのように変化していく流量 x の瞬間的な変化の速度であるから，現代数学の言葉で理解しようとすれば，時間 t を独立変数

1　誤解されることが多いが，この論法自身が数学的に難しいのではなく，なぜこのような厄介な議論を組み立てる必要があり，そのような議論によって，いかなる意味で厳密化が進むのか，というストーリーがわからない，というのが事実であろう．こうした初学者の困惑の責任の半分は，それを説明できない教育側にある．

2　これについては第 II 部第 5 章で再度論ずる．

とし，流量はその関数 $x = x(t)$ であり，その流率 $\dot{x}$ は $\lim_{o\to 0}(x(t+o)-x(t))/o$ という時間微分である．しかし，ニュートンは $\lim_{o\to 0}$ を何とか別の言葉で説明しようとするわけである．これを現代人がまじめに読もうとしても理解は難しい．

厳密化が進んだ現代の数学でもしばしば経験するところであるが，できたての概念には様々な曖昧さが潜んでいるものである．当然のことながら，このような新興数学である微積分法に対しては様々な批判があった ([97, 170, 518])．この種の批判として，司教バークリー[3]によるものはとりわけ有名である[4]．彼は，1734年，エッセイ『解析家——不誠実な数学者に向けての論述』[85] において

> それにしても，流率とは何なのか？ 消滅しつつある増分の速度とは？ 有限な量でもなければ，無限小の量でもなく，かといって無でもない．消え去っていった量の幽霊とでも呼べば良いのだろうか？

のように述べて，「流率」や「消滅していく究極の増分」のような言い回しでは論理的困難が回避し得ないことを喝破した．できて間もない微積分法は，伝統的な幾何学の厳密性に照らすと概念の上でも論理の点でも不完全であり，バークリーの批判はもっともなものである．

数学者の中にも，バークリーの批判に反駁しようとした人は出てくる ([325] あるいは [97] の6章)．たとえば，マクローリン[5]は1742年に大著『流率論』[201] を著して反論を試みた．きわめて大雑把に言えば，これはニュートンが『プリンキピア』で採用したのに似た幾何学に基づいて微積分法を正当化しようという試みであり，これが成功すべくもないないことは我々の目には明らかなことである ([170])．しかし，究極的な拠り所を幾何学に求める強い伝統がイギリスにはあった．そもそもマクローリンは変化量という概念しかなく，関数の概念を有していなかったわけであるから，厳密な理論展開をするための言葉を有しておらず，成功に至らなかったのも無理はない．

これに対して，ライプニッツは無限小量を使って微分を定義した．ニュートンと比べると基礎概念に対する言葉遣いの配慮に欠けるけれども，計算法としての微積分法は十分理解できるし，問題が生ずることも少ない．その結果，イギリス以外の各国では，無限小量はその後ベルヌーイ一族やオイラーに引き継がれ，微積分学の基本的な概念装置として定着する．どんなことにも先端的・先鋭的な関心を旺盛に

3 George Berkeley (1685-1753)．イギリス経験論哲学の代表的論客としてもよく知られている．

4 バークリー自身は数学論争を挑んだというよりは，新科学をリードしている合理主義に戦いを挑んだのであり，キリスト教の信仰を弁護することが目的だったのだが，この問題はここでは切り離す．

5 Colin Maclaurin (1698-1746)．いわゆるマクローリン展開やオイラー－マクローリン公式で有名である．

もったオイラーではあるが，微積分法の基礎に関わる論理的な困難を指摘したバークリーの批判にはまったく興味を示さなかったように見える[6]．それどころか，オイラーは解析学の手法や概念を「無限小」と「無限大」を積極的に使って説明した([137, 139])．オイラーは彼と同時代の人々と同様に，無限小量をあるときはゼロでないように扱い，あるときはゼロであるかのように使っている．オイラーは，無限小はゼロであると開き直っているときもあるし，そうでないときもある．実に巧みに使い分けている，というのが我々の印象である．論理的には少々厄介な「無限小」や「無限大」も正しく使えば便利で強力な数学の道具であるというオイラーの立ち場は，数学の天才の一つの側面を雄弁に物語っている．

まことに，論理的な基礎を欠いたまま，微積分法は広大な世界を切り開いていったのである．今日の高校教育における微積分法が極限の概念から始めるのは，おそらくは19世紀に始まる定式化された極限概念が微積分の基礎に横たわっているという事実に基づくものであろう．しかし，実際上は，極限概念の厳密な定式化を全く欠いているという意味で，高校数学は18世紀以前のパラダイムの中にあるのである．

3.2　連続性

微積分学を厳密に展開するためには当然ながら，連続性の概念が必要になる．現在の大学でも関数をきちんと定義したあと，比較的早い段階で連続性の導入が行われる．では，歴史的にはどうだったのであろうか．オイラーの2番目の関数の定義2.2が公表されてから60年くらいたつまで，現代的な連続性の概念は現れなかったのである．微分も導関数もとっくの昔に現れていたにもかかわらず連続性がきちんと定義されていなかったと聞くと読者諸氏は耳を疑うことであろう．実に不思議であるが現実にそうなのであるからしかたがない．

オイラーは関数（曲線）について「連続」や「不連続」という用語も使っているが，現代とは意味が大きく違っていた．『無限解析序説』[137]や『微分学教程』[139]によれば，単一の「解析的表現」だけで定められる曲線が連続であり，二つ以上の式を用いて区分的に定義しなければならない曲線が不連続である．[137]では，関数とは単一の「解析的表現」であるので，その限りでは「すべての関数は連

6　厄介な問題であるということを直感的に理解したから厳密化の問題をあえて避けることにしたのであろうか？　だとすればそれはそれで賢明な判断だったと言うことができよう．しかし，おそらくは，バークリーの批判は，微積分の出発点にある基礎概念の提示方法の問題に関わるに過ぎず，自分が解析学を通じて開拓している豊かな数理世界の探求にとって深刻な重要性をもつものではない，という認識であったのではないだろうか．

続である」ことになるが，オイラーが曲線としては明確に不連続なものを許容していたことは重要である．無限解析序説の第2巻には「混合曲線あるいは不連続曲線」という表現がある：

> 曲線についての以上のとらえ方から，（曲線について）連続的なるものと，不連続なるもの，すなわち混合的なるものへの分類が直ちに導かれる．まず，連続的な曲線とは，その本性が x の単一の確定された関数で表現されるようなものものである．他方，もし曲線が，その諸部分 BM, MD, DM，などが，同じ x の異なる関数で表現されるとき，つまり，BM の部分がある関数で定義された後，MD の部分は別の関数で定義されるというようになっているときは，このような曲線は，不連続な曲線，ないし，混合した不規則な曲線と呼ぶことにしよう．そのような曲線はある一定の法則にしたがっているのではなく，様々な連続的な曲線の部分をつなげて作られているからである．
> ([137] の第2巻，9節)

オイラーのこの定義は曲線に対するものであるが，この概念は関数に対しても使われていると解釈するのが普通である．したがって，$f(x) = 1/x$ は連続関数，$f(x) = \log(\sin x)$ も連続関数であるが，一方，

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \tag{3.1}$$

を初めとする折れ線関数はたとえグラフが繋がっていても不連続関数であった[7]．関数を定める解析的表現が，区間を越えて連続的に使えない，という意味であったろうと推測できる．

フーリエが [145] の 350 節において $e^{-|x|}$ を不連続関数と呼んでいることからも，少なくとも 19 世紀初頭まではオイラー流の不連続性の定義が生きていることがわかる．また，ガウスにも同様の用例が見られる（第 II 部第 6 章を参照）．

振動弦論争，それをある意味で止揚したフーリエ級数の発見などを通じて，こうした連続性の定義は無意味であることが次第にはっきりしてくる．実際，コーシーは，オイラーの意味での「不連続関数」(3.1) が $f(x) = \sqrt{x^2}$ というきわめて単純な解析的表現をもつことを示し（[339], 1844 年），オイラー流の連続・不連続の概念的区別が矛盾することを指摘した．

7 $|x|$ はひとつの数式であるから連続関数ではないか，といぶかる読者もおられよう．しかし，この絶対値の記号はワイエルシュトラスによるもので，18 世紀には存在していなかった．

今日我々の用いる連続性の概念はボルツァーノ[8]とコーシー[9]に始まる．年代的に早いのはボルツァーノである．彼は [314] の 29 節において今日我々が使う連続関数の定義をほぼ正確に述べている．しかし，翌年に公刊された [315] に（[228] の 256 ページ）より洗練された形で述べられているので，本書ではそれを引用しよう．彼はそれまで使われてきた連続性は正しくないと宣言した後，次の定義を与えている：

定義 3.1（Bolzano の連続関数） 正しい定義によれば，ある境界の内側あるいは外側にある x の値に応じて関数 fx が連続的に変わるとは，次のことである：x がそのような値であるとき，ω を好きなだけ小さくすれば，差 $f(x+\omega)-fx$ が，与えられたいかなる値よりも小さくなること．

この定義は，現在ならば $|f(x+\omega)-f(x)|$ とか $|\omega|$ と書くところを $f(x+\omega)-fx$ や ω と書いている点を除けば[10]，現在使われている定義とほとんど同じであることに注意しよう．すなわち，ϵ-δ 論法という手法による連続性の定義である．ちなみに「ϵ-δ 論法」という特有の表現方法それ自身に数学的意味があると考えるのは，誤解に近い．そこに現れる不等式の使い方が肝心なところである．ϵ や δ の有無だけで判断してはならない．

現代的な ϵ-δ 論法の創始者とされているコーシーによる連続関数の定義は，次のように，かなり「おとなし過ぎて」多くの人の期待を裏切りそうである（[108]）．

> 関数 $f(x)$ が，与えられた二つの限界に含まれる x のすべての値に対して唯一の有限の値をとり，（i を無限小であるとして）差 $f(x+i)-f(x)$ がこの範囲内でいつも無限小であるならば，$f(x)$ は考えている範囲内で変数 x の「連続函数」であるという．

文面上に現れる「無限小」という字句を拾い読みして，ニュートン，ライプニッツの時代に戻ったかのような錯覚に陥る人もいるかもしれないが，[108] を読めばわかるように，ここに登場する「無限小」は，「任意に与えられた量よりも小さくなっていく量」を意味しており，現代的な極限概念に一致しているのである．ただ

8 Bernard Bolzano (1781-1848)．本業は数学者というよりは，神学者・哲学者であった．

9 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)．

10 一般に実数の正負を符号をつけて区別すること自身は，この時代には常識だったので，前後関係から誤解の余地がない場合には絶対値記号はもちろん絶対値という言葉さえも省略されることが多かった．絶対値の記号 $|\ |$ が使われるのはカジョーリ（[104] の 492 節）によれば 1841 年のワイエルシュトラウスによるもの（[623]）である．この論文は，一様収束が初めて使われた論文としても有名である．ただし，この論文は公表されたものではないので，絶対値に $|\ |$ を用いる習慣はワイエルシュトラウスの講義を通じて徐々に広まったのであろう．

し，上の定義を読めばわかるように，数学的に重大なことは，ボルツァーノもコーシーも，ある1点xでの連続性に基づく各点連続と，区間全体での連続性の区別が明確でなく，後者しか考えていないのか，両者を厳格に区別する意味を見落としているか，いずれかであろう．

この連続という概念はなぜ必要となったのであろうか？ ボルツァーノはこの概念に基づいて中間値の定理を証明した．すなわち，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$が連続で$f(a)f(b) < 0$ならば必ず$f(c) = 0$となる$a < c < b$が存在する，という定理である．この定理自体はボルツァーノ以前からよく知られていた．しかし，彼以前には，これにまじめな証明を与える必要があるという認識はなかったのである．幾何学的に明らかであることや運動の直観に訴えるだけでは証明として十分でなく，「純粋に解析的な証明」が不可欠であるという認識から，ボルツァーノはまず連続性の概念を幾何学や運動に頼らず数学的にきちんと定義しなければならないと考えるのである．この意味で，ボルツァーノやコーシーによる連続性の定義の発見は新しい時代の幕開けであると言うことができよう．

3.3 導関数の定義のなかった解析学

現代の我々は$f : [a,b] \to \mathbb{R}$の導関数は各々のxについて

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在するとき，対応

$$x \to \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を導関数と呼んでいる．しかし，オイラーの時代には導関数という名前は存在せず，関数fの微分$\mathrm{d}f$というものが存在するだけであった．オイラーの微分学の教科書 [139, 140] を読むと，$\mathrm{d}x$や$\mathrm{d}y$は一生懸命に定義しているが，導関数は定義していない．二つの量$\mathrm{d}y$と$\mathrm{d}x$が定義されたら$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$は単に割るだけであるから，定義は必要ないのである．我々現代人は，$\mathrm{d}y$や$\mathrm{d}x$そのものに意味があるわけではなく，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

の右辺でもって左辺の意味とする，と習うのであるから，現代のやり方とは根本的

に異なる[11].

次に，導関数という基本概念がどう定着していったのかを眺めてみよう．

3.4　微積分法の合理化

素朴な微積分法から出発して次第に成長を遂げてきた解析学を，理論的発展や応用分野の開拓とは離れて，厳密な基礎の上に打ち立てようとする動きが 18 世紀後半に誕生する．すべての人間的活動を因襲から解放し，合理的に説明しようとする啓蒙主義精神がその背景にあったと想像する．実際，ディドロ達を中心とした急進的な啓蒙主義者達の大きな活動成果に『百科全書』があるが，数学関連項目の執筆指示を受けたダランベールは「極限」の項（百科全書の第 9 巻，1765 年）で

> 極限
>
> ある量が，他の量の極限であるというのは，後者がが前者を決して横切ることなく，与えられたいかなる量（それはいかに小さくてもよい）よりも，後者が前者に近づくことである．その結果，その量とその極限との差は全く指定し得ない．正確に言うなら，極限は，それがその極限であるところの量とは決して一致してはならず，決して等しくなることもない．しかし，極限は，常に次第に接近し，好きなだけわずかしか違わない．

と書いている．わかりにくい文章であるが，元々のフランス語からしてよく練られた文章とは思えず，かなり意訳を補わないとわからない．量（変数）が極限に「限りなく近づく」のを説明するために，本来は無用な条件である「極限値を横切ることなく」とか「決して一致することがない」のような条件を付加している．また，極限値も変数もともに量という言葉で表しているので，字面だけから解釈すれば，たとえば，$n \to \infty$ のときに $(-1)^n + \frac{1}{n}$ の極限が $(-1)^n$ であるという解釈まで許されてしまう．

いろいろと限界はあるが，従来の微積分法に登場した表現をより的確に整理しようとする彼の姿勢は，新興数学である微積分法の基礎概念に理性の光をあてようとした試みであると評価できる．ただ，厳密かどうかを問うならば，ニュートンの定義した極限の概念と五十歩百歩であるということもできる．決して一致しない，と

11　$\frac{dy}{dx}$ のみが意味を持ち，dy も dx も単独では意味がない，と宣言したのは次節に現れるリュイリエ [193] が最初らしい．1786 年．

断っているところなど，ニュートンの主張の受け売りである [213][12]．いずれにせよダランベールは『百科全書』の中で述べただけであって，彼の理論を体系的に整えたわけではないし，教科書を著すこともしなかった．したがって，ダランベールによって解析学の厳密化が達成されたとは当時の人々も思ってはいなかったのではなかろうか．

このような微積分法の合理化に向けて，ダランベールの後で重要な貢献をしたのはラグランジュである．彼の時代には代数学が，幾何学による伝統的権威の独占を打破し，厳密な学問分野として定着していた[13]．そこで彼は解析学を代数学に還元すべきだという主張を展開するのである ([151, 152])．彼の代数学への崇拝ぶりは，彼の『解析力学』([188]，1788 年）に如実に表れている．彼は，「力学は解析学の一部に還元された．一切の幾何学的直感はもはや必要ない．一切が代数的な操作で行われる」と主張して力学の「幾何学からの解放」を唱えた．

> 本書には図は現れない．私が展開する方法では図を描くことは必要ないし，幾何学的あるいは力学的な論証も必要ない．ただ，誰がやっても変わらない一定の代数的計算のみが要求される．解析学を信望する人は，力学が解析学の一分野になり，私がその領域を広げたことを認めてもらえるものと思う．

この『解析力学』の序文にはラグランジュが自分の新しい試みに得意になっている様子がうかがえる．

ラグランジュによる解析学の厳密な基礎付けは彼のエコール・ポリテクニクの教科書 [186, 187] で展開されている．彼がとった方法は，今日の言葉で言えば，形式的べき級数を出発点として微分操作を無限小や極限を避けて，純粋な代数的演算ですませてしまうという方法である．無限小量がきちんとした量ではないことはニュートンも気づいてはいたし，バークリー以降の人々にははっきりとそう理解されていた．では，極限の方はどうかというと，上で見たように，18 世紀の極限概念は決して厳密に定義されたものとは言い難いものであった．だからラグランジュは極限という概念すら解析学から追放せねばならないと固く信じたのである．まるで魔女狩りのような話であるが，事実である．そして，怪しげな基礎から解放された解析学の構築を，自分が初めて成し遂げたと信じたのである．彼の本は当時の人々

12　ニュートンの定義については第 II 部で説明する．

13　第 1 章で説明したカルダノやヴィエトは，代数学が怪しげなものではないことを示すために幾何学に頼り，「このように幾何学的に証明できるからこの式は正しい」という論証をしている．200 年もたたないうちに，幾何学と代数学の立場は逆転しているのである．

にはずいぶんと読まれたようである．今日も使われている「導関数」という，今の我々から見ると意味のよく分からない用語はラグランジュのこの書物に由来するものである[14]．

ラグランジュの壮大な野心は，やがて何回でも微分できる関数でありながら，べき級数に展開できない関数の存在を指摘される[15]に及んで，その破綻が決定的になる．詳しく述べる余裕はないので，[151, 152] を参照してほしい．[186] の意義は，むしろその中で展開されている様々な不等式がボルツァーノやコーシーの理論の引き金となったことである ([150, 151])．

凡庸な人材ですら敬われるならばきっと優れた人材が集まるはずだという「まず隗より始めよ」というのはけっこうあてはまることが多いから，最高レベルの研究でないからといって無視できるものではない．間違っていたわけであるが，それが正しい理論の呼び水になったのであれば歴史的に尊敬の価値ありと言うべきではないだろうか．捨て石の大切さはある意味で，数学の歴史にも通ずる考え方である．

こうしてある程度準備が整ったところでボルツァーノやコーシーの登場となり，解析学が厳密化の歩みを始めるのである．今ではそれ以後に整理されたものが標準的なものとなっており，理系の学生が大学 1 年生のときに習うものとなっている．しかしながら，ここに至るまでに実はきわめて長い道のりをたどってきており，その過程で展開された多くの事件（発見，誤謬，誤解，論争）のダイナミックな歴史が，現代の大学教育では省略されていることがご理解いただけるものと思う．

* * *

演習問題

[問題 1] ✿ ダランベールの定義を採用したときに，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

は成り立たない（あるいは意味を持たない）ことを確認せよ．

[問題 2] ✿✿ $1-1+1-1+\cdots$ という無限級数は 18 世紀には論争の場となっていた ([223])．1703 年に Grandi が

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

において $x=1$ を代入すると，$1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2}$ を得ることを示した．これは，本人はその意志はなかったかもしれないが，発散級数に意味を与えることができ

14　ラグランジュは，与えられた関数に対して，解析的 = 計算的に導かれる関数にすぎないという意味で「導かれた関数」という表現を使ったのであろう．

15　コーシー [334]，および，[108] の 38 章．現代でもよく引き合いに出される関数 $\exp(-\frac{1}{x^2})$ である．

ることの最初の結果のようである．では，$|x| < 1$ で収束するテイラー級数を持つ関数 $f(x)$ で，$f(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ だが $f(1) \neq 1/2$ となるものは存在するか？

[問題 3] ✿ 級数の収束におけるダランベールの判定条件は，次のように習うはずである：

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

ならばこの級数が収束する．ダランベールの著作の中でこれは 1761 年に現れている（[354]）．これを読むとダランベールは，「級数 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ において十分大きなすべての n について $|a_{n+1}| < |a_n|$ が成り立つならば，この級数は収束する」と主張しているように読める．このように解釈すると，ダランベールの主張が正しくないことを例示せよ．

[問題 4] ✿✿ 以下に挙げるのは，ファア・ディ・ブルーノ[16]が 1856 年に発見した，ふたつの 1 変数関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $g(f(x))$ の導関数を表示する公式である．

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}g(f(x))$$
$$= \sum \frac{m!}{b_1!b_2!\cdots b_m!}g^{(k)}(f(x))\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right)^{b_m}$$

ここで，右辺は，

$$k = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m, \qquad b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + mb_m = m$$

となるすべての $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \cdots, b_m \geq 0$ について和をとるものとする．$m = 1, 2, 3$ について手計算で確認せよ（一般の m で証明するのは楽ではない）．

[問題 5] ✿✿ [339] においてコーシーは，

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{t^2 + x^2}\,\mathrm{d}t = |x|$$

を示し，左辺がオイラーの意味で連続な関数であり，右辺がオイラーの意味で不連続になることを注意した．この式を証明せよ．

[問題 6] ✿ 1827 年，[547] においてその著者は，級数の収束の判定条件を与えている（[547] の 34 ページ）．その言葉遣いはいささか曖昧であるが，「すべての項が正であり，$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ ならば $\sum a_n$ は収束し，そうでないならば収束しない．」というものである．この前半部分は正しくないことを証明せよ．また，後半部分は，

$$\liminf_{n\to\infty} na_n > 0$$

と解釈するならば正しいことを証明せよ．

16 Francesco Faà di Bruno (1825-1888).

第II部
各　論

ここからはいろいろな関数概念の背景を詳述することにする．細かい話も多いからすべてを通読する必要はない．ここから先は拾い読みされることを前提に書いてあるので，気に入ったところだけを読んでくださって結構である．

重要度が比較的低いと思われる事項は章末演習問題に回してある．ただし，これらも歴史的に意義のある話題であり，余力のある読者には一度は解こうと試みていただきたい．

第4章　解析学の創始者——オイラー

Everything, even the obvious, is earned with hard thinking by some pioneering genius.——Paul J. Nahin ([207] の 42 ページ)

「Newton の運動方程式」の発見者が Euler だというのはなんとも意表外であるが，事実は事実として認められなくてはならない．——山本義隆（[63] の 177 ページ）

In the early eighteenth century, functional notation was used only in very limited circumstances.—— Cannon & Dostrovsky ([105] の 2 ページ)

The intuitions of great men are sounder than the deductive demonstrations of mediorities.——M. Kline ([180] の 168 ページ)

First the derivative was used, then discovered, explored and developed, and only then, defined.——J.V. Grabiner([430])

4.1　オイラーの位置づけ

第I部の第2章でも述べたように，17 世紀までは関数の芽生えはあったかもしれないが，関数が主役になったのはオイラー以降であるという立場に我々は立つ．したがって，オイラーは本書の最重要人物である．彼は 17 世紀以降大きく発展してきた無限小解析の方法を関数を主役として体系化し，それまでは「代数的手法」の別名[1]であった「解析」という用語を，無限小・無断大を発想の根拠において微積分の分野を表す名称として確立するのである．これが，解析学の始まりである．実は解析学に限らず，いささか大げさに言えば，多くの現代数学者はオイラーが敷いた線路の延長上を走っていると言うことができるであろう．本章の目的はオイラーの業績を振り返りながら解析学の基礎を振り返ることである[2]．

1　ヴィエトの著作 [265] が *Analytic Art* と題されていることを思い出してほしい．

2　オイラー以前の解析学については [39, 45, 99, 136, 156, 170] が参考となるであろう．

解析学の主要な対象は関数である．解析学の歴史は関数をうまく表現する方法の開発と改良の歴史であるというのは極論かもしれないが，一面の真理である．たとえば関数をべき級数展開することによって関数の持つある種の性質を詳しく知ることができるということは 17 世紀の（特にニュートンの）大きな発見である．たとえば，

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots$$

などは，現在ではよく知られているが，たったこれだけの発見に至る道のりすら平坦ではない[3]．

第 I 部で，関数という言葉がライプニッツあるいはヨハン・ベルヌーイによって使われていたことを述べた．ヨハン・ベルヌーイは等周問題に関して関数という定義を持ち出した．しかし，関数が主役であるという感覚は持っていないようである．オイラーになると関数は主役である．ベルヌーイの中では曲線を表現する関数はあるけれども，オイラーの著作には抽象的な概念としての関数が現れ，解析学の主役となっている．

4.2 オイラーの業績

関数概念の形成を議論する前に，オイラーを簡単に紹介しておこう．オイラーは，数学と物理学の幅広い分野で不朽の業績を残した数学者である．実際，彼の解析学・力学・整数論における業績は，独創性の点でもその波及効果の点でも，まさに歴史上燦然と輝くものである．そもそも，それぞれの分野に限って彼の業績を概観することですら容易なことではない．数学史上のスーパースターの一人であるから，伝記なども多い（[50, 132, 208]）．

オイラーが解析学で成し遂げた仕事は枚挙に暇がないが，そのうち，特によく知られているのは次の二つであろう．

- 自然対数の底を定義[4]し，それに対して e という文字を最初に使用し[5]，e が無理数であることを証明した[6]こと．
- オイラーの公式 $e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ を発見したこと．

3 たとえば [136] や [36] を見よ．ニュートンが $\sin x$ のべき級数展開を示すのにいかに苦労したかを知れば，読者は驚愕されることであろう．実際，ニュートンは $\sin^{-1} x$ のべき級数展開をまず導いて，その後，その逆関数として $\sin x$ のべき級数展開を導いているのである．



図 4.1 左：少年オイラーが育った教会．スイスのバーゼル市郊外（2007 年岡本久撮影）．右：サンクトペテルブルグにあるオイラーの墓（2007 年蔡東虎氏撮影）．

しかしながら，後生への影響という点では数理物理学への功績も勝るとも劣らない．

- 変分法の基礎を確立し，そしてそれを力学の多くの問題に応用したこと．
- 剛体の運動方程式を確立したこと[7]．
- 流体力学を数理科学として確立したこと．

などはよく知られている．これに関連して，ラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

を最初に見つけたのはラプラスではなく，オイラーが 1761 年にすでに導いている（[391] の 158 ページ）．また，流体力学のベルヌーイの定理もダニエル・ベルヌーイが発見したものであると言われているが，彼の本 [88] を読んでも我々が今知っているものには出会わない．少し遅いけれどもオイラーが [391] の 159 ページで見つけているものが我々の知っているベルヌーイの定理の初出である．これを，彼自

4　ちなみに，いくつかの書物では e をネイピア数と呼んでいるが，これはよい名前とは言えない．現代数学の立場から深読みして翻訳すると，ネイピアの対数は自然対数に対応していると見なすことができないわけではないが，ネイピアが e を発見したわけではない．「オイラー数 (the Euler number)」と呼ぶのが正しい（[289, 324]）．

5　カジョーリ [104] によれば円周率に π という文字を最初に使ったのはウィリアム・ジョーンズで，1706 年のことである．自然対数の底 e を最初に定義したのはオイラーであり，それに対して e という文字を用いたのも彼自身である．1727 年あるいは 1728 年に最初の使用例があるという（[237]）．しかし，なぜ e という文字が選ばれたのかは不明である（[203]）．e はオイラーの頭文字であると書いてある書物もあるが，そんな根拠はどこにも見あたらない．俗説でしかないようである．

6　1744 年．[386]．

7　実は，我々がニュートンの方程式として習っている $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$ もニュートンによるものではなく，オイラーによるものである（[63, 611]）．[611] においてトゥルースデルは，「科学史ではしばしば起きることであるが，簡単なアイデアが一番達成しづらい．簡単さは一人で現れてくるものではなく，創出されねばならない．」と述べている．我々がニュートンの名前で教わる方程式も，ニュートンよりも後の人々の努力の成果なのだ．

身が導いた基礎方程式（「オイラー方程式」と呼ばれている）から導出しているのである．オイラーは単なる実験科学であった流体についての研究を，流体力学という数理科学に昇華させたと言うことができる．

この他に，多面体に関するオイラーの定理

- $V - E + F = 2$（ここで，V は多面体の頂点 (vertex) の個数，E は辺 (edge) の個数，F は面 (face) の個数である）

を発見したことなど，位相幾何学やグラフ理論の先駆的な業績（[90]．図 4.2）や，整数論の組織的研究など，躍動に満ちた業績がある．その他にも輝かしい業績を残したのであるが，きりがないのでここで終えることにする．興味のある読者は [50, 132, 249, 263] を参考にしてほしい．

オイラーは（もちろんライプニッツもニュートンも）間違いを犯さなかったわけではない．しかし，それほど本質的な間違いはないように思う．いくつかの糾弾は的外れである．たとえば，$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ などという愚かな式を導いている，といった類の非難である．この発散級数については確かに彼の教科書 [140] の 58 ページに出ているが，彼はこれがおかしいことに気づいており，それをはっきり記している[8]．それを書かずに，前半のおかしな式だけを取り上げて彼の天才性を貶めようとする人は，彼の著作を読んでいないのであろう．小さな勘違いも見受けられるし，振動弦の論争でダニエル・ベルヌーイの主張を認めることができなかったこと（第 II 部第 5 章）も間違いと言えば間違いである．しかし，本質的な間違いを犯したことは驚くほど少ないというのが我々の印象である．

オイラーの名前を冠する公式や概念は非常に多いが，さらに加えて，オイラーが最初の発見者であるにもかかわらずオイラーの名前が付いていないものもある．一番重要なのは力学の「ニュートン方程式」である．これは実はオイラーが見つけたものである ([610, 63])．上述のラプラス方程式もそうであるし，他にも，たとえば

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

はしばしば「フレネル積分」と呼ばれているが，最初に発見したのはオイラーである ([390])．彼の証明は現代数学者の目から見ればきわめて形式的であり，厳密な

8 これは $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ において $x = 2$ とすると出てくる．しかしオイラーは，おかしいがどう修正していいかわからないと正直に告白している．彼は [140] の 109 節で「発散する級数は和を持たない」と宣言しているのであるから，収束と発散の違いはよく理解していた．さらに，これは和の定義に依存することであり，そのままではだめだが，発散する級数でも何らかの意味があるはずだと 110 節で強調している．19 世紀後半からの発散級数の発展を見越したかのようである．



図 4.2　2007 年にオイラー生誕 300 年を記念して作られたスイスの切手．多面体公式が印刷されている．ここで，e = Ecke（角=頂点），k = Kante（稜=辺），f = Fläche（面）．

ものとは言えないけれども，きわめて説得力のあるものであり，当時の数学者には証明と受け入れられてもおかしくはない．オイラーの数学の神髄が見えてくるので，ここにその概略を記そう．

彼はガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

から出発する[9]．k を定数として，$x = ky$ と変数変換すると，

$$\frac{\Gamma(s)}{k^s} = \int_0^\infty y^{s-1}e^{-ky}\mathrm{d}y$$

を得る．次に $k = \rho(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ を代入すれば（ここで代入できるかどうかといったことで彼は悩まない），

$$\rho^{-s}\Gamma(s)\cos(\alpha s) = \int_0^\infty y^{s-1}e^{-y\rho\cos\alpha}\cos(y\rho\sin\alpha)\mathrm{d}y,$$
$$\rho^{-s}\Gamma(s)\sin(\alpha s) = \int_0^\infty y^{s-1}e^{-y\rho\cos\alpha}\sin(y\rho\sin\alpha)\mathrm{d}y$$

が導かれる．ここで $s = 1/2, \rho = 1, \alpha = \pi/2$ とおくと第 2 式から，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(1/2) = \int_0^\infty y^{-1/2}\sin y\,\mathrm{d}y$$

を得る．オイラーは

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty y^{-1/2}e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (-\log z)^{-1/2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}$$

を知っていたので，これで積分の値がわかったのである（この定積分については後

9 「ガンマ関数」もオイラーが導入したものである．ただし，Γ という記号を用いたのは彼ではなく，ルジャンドル（[191] の 221 ページ）である（[357]）．

述する).

オイラーは同じ論文で,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{4.1}$$

も導いている.これを証明するには,

$$\Gamma(s)\sin(\alpha s) = \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y\cos\alpha} \sin(y\sin\alpha)\mathrm{d}y \tag{4.2}$$

において $s \to 0$ とする.

$$\Gamma(s)\sin(\alpha s) = \Gamma(s+1)\frac{\sin(\alpha s)}{s}$$

であるから左辺は α に近づく.ゆえに

$$\alpha = \int_0^\infty y^{-1} e^{-y\cos\alpha} \sin(y\sin\alpha)\,\mathrm{d}y$$

を得る.$\alpha = \pi/2$ とすれば (4.1) を得る.

これらの等式に限らず,オイラーのすばらしさはその自由奔放なアイデアにある.ここでさらに寄り道をして,[137] の 132-134 節から

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{4.3}$$

を導くところを見てみよう.オイラーはまず,132 節と 133 節で,

$$(\cos z + \mathrm{i}\sin z)^n = \cos nz + \mathrm{i}\sin nz$$

を証明する[10].二項定理を使って左辺を展開し,両辺の実部をとると,

$$\begin{aligned}\cos nz = (\cos z)^n &- \frac{n(n-1)}{2!}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 - \cdots\end{aligned}$$

ここで,n を無限に大きくしてゆき,z は無限に小さくしてゆく.しかし,同時に,$x = nz$ は一定にとどめる.このとき,

$$\cos z \approx 1, \quad \sin z \approx z, \quad n(n-1) \approx n^2, \quad n(n-1)(n-2)(n-3) \approx n^4, \cdots$$

であるから,

10 これは現代では「ド・モアブルの公式」と呼ばれており,当時すでに知られていた.[207] によればド・モアブル (Abraham de Moivre, 1667–1754) 自身の著作の中にはこの公式は見当たらないが,彼もニュートンもこの公式を知っていたという.

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2z^2}{2!} + \frac{n^4z^4}{4!} - \cdots$$

これから (4.3) を得る.

何とも発見的な躍動に満ちていないだろうか？ 現代の大学生が上のような議論を組み立ててもまったく評価されないであろう. 様々な式変形の証明が欠けているからである. これはある意味しかたのないところで, 当時は数学的な式で表現された関係は, その中に登場する変数の値に限らず, 普遍的に成り立つという「信念」が多くの数学者に共有されていたのである. 確かに厳密ではないが, わかりやすく, 納得しやすい「証明」である.

もちろん, 上のすべてのステップは厳密な証明を与えることが可能であり, オイラーの考え方に本質的な過ちはない. ここで本章冒頭のクラインの言葉をもう一度読んでいただければ幸いである. 20 世紀, 21 世紀の数学者も厳密に書くのは論文にするときだけであり, 新しい定理を発見するときにはこんなふうに想像力を働かせることが多い. 想像力のない数学者は一流にはなれない[11]. また,

> 現代的な水準の厳密性を強いられていたら, オイラーや彼の同時代人が彼らの結果を導くことができたかどうか疑わしいものだ.

というグラビナー [429] の言葉[12]も印象的である.

オイラーの業績のうちの一つに

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.4}$$

を示したことが挙げられる. 左辺の級数がある値に収束するということは比較的容易にわかるが, それがどういう値であるのかは当時かなりの大問題だったようである. 彼の師匠であるヨハン・ベルヌーイなどもずいぶんと研究を重ねたようであるが, オイラーが 1734 年に解決するまで誰にもわからなかったのである. この級数の値の決定はすでに数学者としての地位を確立していたオイラーの名前を不動のものにしたと言われている ([375] の 84–85 ページ, 印刷公表は 1740 年. [131, 132] も参照せよ).

一般に, $s > 1$ なる実数について

11　数学者には小説家以上に想像力が必要であるとヒルベルトが語った逸話が, リード [222] の 175 ページに書かれている.

12　この言葉は, 18 世紀の数学者がルーズであったと糾弾しているのではなく, 重荷がなかったからこそ華々しい成果が出せたということを言っているのである.

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots \tag{4.5}$$

は収束するので，これを s の関数と見て $\zeta(s)$ と表す．これがリーマン[13]のゼータ関数である．オイラーの等式 (4.4) は $\zeta(2)=\pi^2/6$ と表すことができる．

オイラーが (4.4) を導いたのと同じ方法で，k が偶数のときの $\zeta(k)$ を計算することができる．実際オイラーは $k=2,4,\cdots,26$ について計算を実行し，たとえば，

$$\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots \tag{4.6}$$

を得ている．$k=26$ のときの値は（応用上意味のあるものではないけれど），

$$\frac{2^{25}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 27}\frac{76977927}{2}\pi^{26}=1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\cdots$$

となることを示している（[378] の 185 ページ．または，『無限解析序説』([137, 13]) の 168 節)．

k が偶数の時，$\zeta(k)$ の値は $\pi^k\times$ 有理数 となることがわかっている．ところが，k が奇数になるとオイラーは何も述べることができなかった．不思議なことに

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots$$

はわかったのであるが（[375] の 80 ページ，1740 年．[137] の 175 節，および [287])，$\zeta(3)$ の正体は不明のまま残されたのである．まして $\zeta(2k+1)$ $(k=2,3,\cdots)$ については何の結果も得られなかった．こういう事情があったので，1978 年にアペリー (R. Apéry) が $\zeta(3)$ が無理数であることを証明したというニュースはかなりショッキングなものとして伝えられたということである．その証明は複雑なものであったらしいが，彼の発表のすぐ後に初等的な証明が得られている．このあたりの歴史については [309, 613] を見よ．また，塩川 [27] も参考になるであろう．

定積分

$$\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{4.7}$$

は「ガウス積分」とか「ポアソン積分」と呼ばれることがある．これを最初に計算したのはオイラーであるという人もいるようである．確かに彼は，

$$\int_0^1(-\log x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi} \tag{4.8}$$

を導いており（[388] の 332 ページ)，左辺は変数変換すれば

13 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).

$$2\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

に等しくなることは直ちにわかるから，実質上 (4.7) を知っていた，という「論理」に走る気持ちもわからぬではないが，(4.7) を書き下していたわけではないから，歴史的には正しくない．また，[618] はド・モアブルが最も古いと主張し，積分 (4.7) を「モアブル積分」と呼んでいるが，これは正しいであろうか？ [237] の 568 ページを読めばわかるのだが，ド・モアブルは実質的に (4.7) をつかんでいたことは間違いないけれども，彼の書いた [124] の中には (4.7) は無いのである．彼の書いたものを現代人が解釈し直せば (4.7) になるというだけである．現代を投影して歴史を判断する傾向に，我々は慎重であるべきである．

和算家建部賢弘によって得られた式（[238] の 150 ページ，[18] の 111 ページ，[17] の 130 ページ）

$$\frac{a^2}{4dh} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n \tag{4.9}$$

は和算の世界では著名である．ここで，d はある円の直径，a は円弧の長さ，h は矢と呼ばれる量で，円弧の中点と円弧の両端を結ぶ線分の中点との距離である（図 4.3）．建部はこれを西洋の微積分を使わずに導いている ([238, 18, 17])．(4.9) を簡単に導くにはどうすればよいであろうか？ これはオイラー（[378] の 183 ページ）が導いた等式

$$\left(\sin^{-1} x\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\frac{x^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}\frac{x^{2n}}{n^2} \tag{4.10}$$

を用いると簡単に証明できる．しかし，建部が (4.9) を発表したのが 1722 年，オイラーが上式 (4.10) を発表したのが 1743 年であることを忘れてはならない．

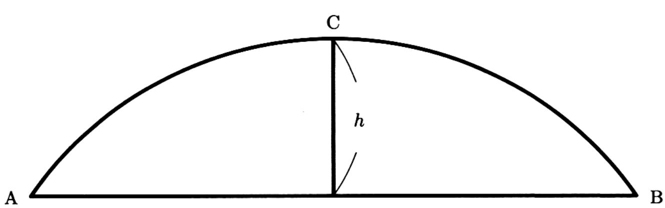


図 4.3　矢の定義．AB $= a$.

4.3 オイラー全集について

20 世紀の初め，オイラーが誕生して 200 年たったことを記念してオイラーの全集が出版され始めた．これは 4 部に分かれ，第 1 部が純粋数学，第 2 部が力学・天文学およびその周辺，第 3 部は光学などその他の科学，第 4 部が手紙などとなっている．第 4 部は未だに出ていない部分があるほどであるから，この出版事業がいかに大変なものであったか想像にあまりある．これだけ大量の研究結果を残した科学者は他にはいない．空前にして絶後というのはオイラーのために使われてしかるべき形容詞である．手紙の類を除けばすべての論文・教科書はここで見ることができる．オイラーの著作を分類するのはエーネストレム番号 (Eneström index) を使うのが便利である．エーネストレム[14]はスウェーデンの数学史家で，オイラーの著作を番号付けて，1 番から 866 番までとした．この番号はオイラー全集にも使われており，オイラーの論文・著書・手紙を参照するときの基準となっている．出版もされているが，オイラーアーカイブ [2] にまとめられており，その一覧を読むことは誰にもできる．E1 から E866 と書かれる慣例になっている．

* * *

演習問題

[問題 1] ✿ $-\pi < x < \pi$ で関数 $f(x) = x$ が

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{4.11}$$

と展開できることを仮定し，$a_n = \dfrac{2}{n}(-1)^{n-1}$ となることを証明せよ．

[問題 2] ✿ 問題 1 で得られた式

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \tag{4.12}$$

を $0 \leq x \leq \pi$ で積分（右辺は項別積分）することによって，

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

を証明せよ．次にこれを用いて (4.4) を証明せよ[15]

---

14 Gustaf Hjalmar Eneström (1852-1923)．第 II 部第 9 章に出てくるエーネストレム－掛谷の定理 9.7 を発見した人物でもある．

15 式 (4.12) はオイラーによって得られた（[382] の 584 ページ）．この論文は 1760 年に出版されている．いくつかの文献（たとえば [208] の 129 ページ）にはオイラーが 1744 年に発見したものであると

[問題 3] ✿ オイラーは次のような予想を立てた：

- 任意の自然数 N に対し，N 個以下の自然数 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$ で $x_0^N = x_1^N + x_2^N + \cdots + x_{N-1}^N$ を満たすものは存在しない．

たとえば $N = 3$ のときには，$x^3 = y^3 + z^3$ を満たす自然数は存在しない，ということになるが，これは有名なフェルマーの定理の特殊な場合である．オイラーはフェルマーの定理の $N = 3$ の場合を自分で証明していた[16]ので，上の予想を思いついたのであろう．彼の予想が正しいかどうかは長らく不明であったが，1966 年に次のような反例が見つかることによって，正しくないことがわかった ([495])．

$$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$$

この式を確かめよ．

[問題 4] ✿✿ 次式を証明せよ：

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - p^{-2}}$$

ここで右辺はすべての素数に関する積をとるものとする．

[問題 5] ✿ 前問を使って，二つの自然数を任意にとったとき，それらの最大公約数が 1 となる確率が $6/\pi^2$ であることを証明せよ．

[問題 6] ✿ 次式を証明せよ：

$$\int_0^1 \log x \log(1 - x) \mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

[問題 7] ✿ 次式を証明せよ：

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots = 3 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^1 (\log x)^2 \log(1 - x) \mathrm{d}x.$$

[問題 8] ✿ 次式を証明せよ：

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{\log(xy)}{1 - xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

[問題 9] ✿ c_n を

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

で定義する．このとき次式を証明せよ．

書いてあることもある．しかしこれは彼が友人であるゴールドバッハに宛てた手紙の中に書き込んだものである（オイラー全集 Ser.IV の 1，148 ページ）ので印刷公表された年ではない．1748 年の [137] の 260 節には次の級数が与えられている：

$$\cos(x + y) + \cos(x + 2y) + \cos(x + 3y) + \cdots = -\frac{\sin\left(x - \frac{y}{2}\right)}{2 \sin \frac{y}{2}}.$$

16 これについては，たとえば [224] を見よ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}$$

[問題 10] ✿✿ オイラーによる等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18} \tag{4.13}$$

を証明せよ．

[問題 11] ✿ 次式を証明せよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

[問題 12] ✿ (4.10) を用いて (4.9) を証明せよ．

[問題 13] ✿ 等式 (4.10) を証明せよ．

[問題 14] ✿✿ 次の等式を証明せよ．[506] 参照．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\binom{2n}{n}} = -2\left[\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\binom{2n}{n}} = \frac{17\pi^4}{3240}.$$

[問題 15] ✿ $x^y = y^x$ という等式は，$y = x$ という当たり前の関数も定めるが，それ以外にも，$1 < x < \infty$ で定義され，そこで単調減少，かつ，$\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} y(x) = +\infty$ を満たす関数をただ一つ定めることを示せ（図 4.4（左）のようになる．[14] または [137] の 519 節参照）．

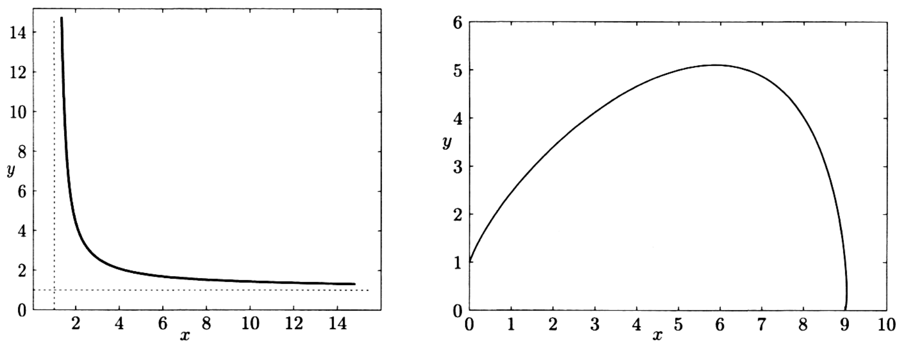


図 4.4 左：$x^y = y^x$ の定める関数．$x = 1$ と $y = 1$ が漸近線になる．右：$b = 10$ のときの，$(b - x)^x = y^y$ のグラフ．

[問題 16] ✿ 18 世紀イギリスの雑誌（年鑑）*Ladies' Diary* の 1741 年号に次のような問題がある（[192], Question 217）．$b > 1$ として，$(b - x)^x = y^y$ が定める関数 $y = y(x)$ の

最大値を求めよ（原題には関数という言葉もないし，もっと幾何学的に述べられているが，ここでは現代風にアレンジしている）．これは結局，$(b-x)\log(b-x)-x=0$ の根を求めることに帰着される．$b=10$ のとき，この根は，$x=5.866\cdots$．関数のグラフは，図 4.4（右図）．関数は $0 \le x \le x_1 = 0.90398\cdots$ で定義可能．$y(x_1)=1/e$ である．グラフは $(x,y)=(9,1)$ と $(x,y)=(9,0)$ を通り，$9 \le x < 9.0398\cdots$ では二価となる．以上の事実を確かめよ．

[問題 17] ✿✿✿ $\sigma > 1$ とする．このとき，

$$\int_0^\infty \cos(x^\sigma)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \sin(x^\sigma)\,\mathrm{d}x$$

を σ の関数として具体的に書き下せ．

[問題 18] ✿ ブラウンカー[17]による次の式（1668 年）を証明せよ．[112, 241] 参照．

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots=\log 2.$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\cdots=\frac{3}{4}-\log 2.$$

[問題 19] ✿ 次式を証明せよ．

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}=\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad (0<x<\frac{\pi}{2}).$$

これは 17 世紀，メルカトール図法に関して重要な働きをした．[573] 参照．

[問題 20] ✿ 関数 $f(x)=x^2\ (-\pi<x<\pi)$ をフーリエ展開し，(4.4) を証明せよ（このアイデアはオイラー [382] による）．

関数 $f(x)=\pi^2 x - x^3\ (-\pi<x<\pi)$ をフーリエ展開し，次式を証明せよ（[563] の 414 ページ．[304] の 6 ページも参照せよ）．

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

[問題 21] ✿ D. ベルヌーイによる次式を証明せよ（[304] の 6 ページ）．

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\cdots=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2(1-\cos x)}.$$

[問題 22] ✿ (4.6) を証明せよ．

[問題 23] ✿ ローレンス [189] によれば，曲線

$$x=\int_0^t \cos s^2\,\mathrm{d}s, \qquad y=\int_0^t \sin s^2\,\mathrm{d}s \qquad (0\le t<\infty)$$

は，オイラーの螺旋とか，クロソイド (clothoid) とか，コルニュの螺旋とか呼ばれているようである．これがどのような曲線になるか描いてみよ．

---

17 William Brouncker (1620-1684).

[問題 24] ✿ 1702 年にヨハン・ベルヌーイが証明した次式を証明せよ．

$$\arctan z = \frac{\mathrm{i}}{2}\log\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z} \qquad (z\in\mathbb{C}, |z|<1).$$

[問題 25] ✿ 1747 年にオイラーが証明した次式を証明せよ．

$$\arcsin z = \mathrm{i}\log\left(\sqrt{1-z^2}-\mathrm{i}z\right) \qquad (z\in\mathbb{C}, |z|<1).$$

[問題 26] ✿ ド・ボーヌの問題（第 I 部 2 章問題 3）を次のようにひねってみる．この性質を満たす曲線は放物線であることを証明せよ（オイラー [137] の II 部 152 節参照）．
図 4.5 のように曲線上の任意の点 P から x 軸に垂線をおろし，その足を Q とする．点 P を通る法線と x 軸の交点 R とする[18]．このとき，長さ QR が P の位置によらず一定となる．

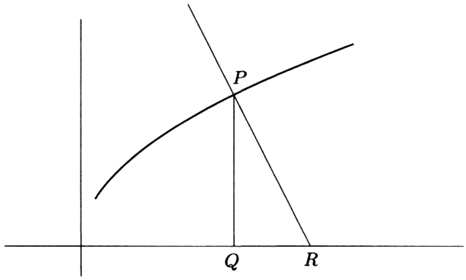


図 4.5　接線影一定の曲線は放物線である．

[問題 27] ✿✿✿ オイラー [386] による次式を証明せよ：

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

[問題 28] ✿ オイラーは彼の代数学の教科書で，$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)\times(-3)}=\sqrt{6}$ という勘違いをしていることを確かめよ（[142] の 148 節）．

[問題 29] ✿ オイラーはベッセル関数の一部，ガンマ関数，ベータ関数などを使った最初の人物である．ベッセル関数の歴史については [371] を見よ．ガンマ関数の歴史については [56, 357] を見よ．ベータ関数は，実質上，[388] に現れている．Γ とか B とかの記号の由来については [104] の 649 節を見よ．[357] を参考にして，(4.8) が [388] でどのように証明されているか，調べてみよ．

18　PR が法線なので QR は「法線影」と呼ばれる．

[問題 30] ✿ 問題 15 の関数 $y = \varphi(x)$（単調減少なもの）は，

$$z = x^{1/x}, \quad y = z^{z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

という表示を持つことを証明せよ．

[問題 31] ✿✿ z の関数 y を，

$$y = z^{z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

すなわち，

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad y_{n+1} = z^{y_n}, \quad y_1 = z$$

で定義するとき，$e^{-e} \leq z \leq e^{1/e}$ においてこの極限が存在することを証明せよ（オイラー [396]，1778 年．[486] も参照）．

[問題 32] ✿ 上の関数 $y = y(z)$ のグラフが図 4.6 のようになっていることを確かめよ．

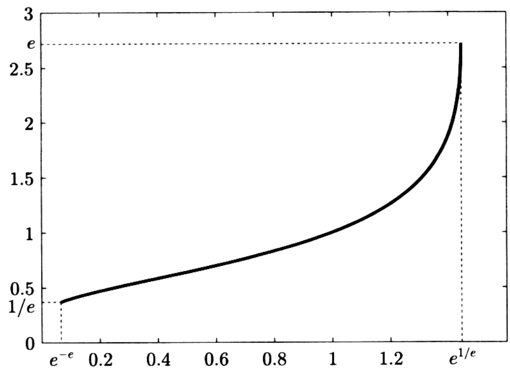


図 4.6

第5章　解析学の厳密化

The investigator himself, however, as in the other sciences, does not work in this rigorous deductive fashion. On the contrary, he makes essential use of his phantasy and proceeds inductively, aided by heiristic expedients.——Klein（[177] の 208 ページ）

··· だからといってぼくはなにもアリストテレスに耳を傾けてはならぬとはいいません．むしろアリストテレスを知り熱心に研究することをすすめます．ぼくが非難するのは，ただ盲目的にかれのいったことすべてに服従し，その命令を不可避なものと受け取ってそれ以上の根拠を探し求めないような仕方で無条件降伏することです．——ガリレオ・ガリレイ（[20] の上 173 ページ）

Farther Brown laid down his cigar and said carefully: "It isn't that they can't see the solution. It is that they can't see the problem."——G.K. Chesterton (The Point of a Pin. The Scandal of Farther Brown)

5.1　解析学の基盤

第 I 部第 2 章で見たように，関数は式として出発した．そしてその式の意味が少しずつ変わってきたのが 18 世紀である．その間，関数の意味は完全に厳密ではなかったが，きわめて豊潤な成果を生み出し続けてきた．この 18 世紀の数学を谷間の時代と見なす傾向がある．これは，概念的に大きな変化が起きた「パラダイムシフト」が重要であり，二つのパラダイムシフトの間の通常科学の時代を軽く見るという，傾向の産物であると思われる[1]．ニュートンとライプニッツによる微積分学の発見を最初のパラダイムシフトとし，コーシーによる解析学の厳密化が次のシフトであるとすれば，18 世紀は通常科学の時代であり，それはある人々によれば谷間の時代であるということになるのであろう．しかし，たとえこれを谷間の時代

1　クーン [184] 自身は通常科学を軽く見ていたとは思えないが，彼の説を解釈した人々の誤解も多い．

と呼ぶ人であっても，18 世紀の成果が巨大であったことは否定できないであろう([537])．また，17 世紀のデカルト，ニュートン，ライプニッツといった人々の偉大な創造は忘れてはならないが，それらが真に偉大な創造であったと結論づけることができるのは，我々が 18 世紀の発展を知っているからであり，18 世紀の成果がその偉大さを証明したと言うこともできよう．

18 世紀の解析学は厳密ではなく 19 世紀になるとその反省に迫られ，コーシーが解析学に厳密性を吹き込み，今日の厳密な解析学が誕生した——こういった調子の文章が見られることがままある．これは全くのウソというわけではないが，真実からはほど遠い．コーシーの貢献は極めて大きいが，彼の前に解析学の厳密化に関する仕事がなかったわけではないし，彼によって厳密化がすべて達成されたわけでもない．このあたりの歴史を極限という概念を例にとって調べてみよう．なお，ニュートンやライプニッツおよび彼ら以前の解析学については原典を読んでもよくわからないこともある．中村幸四郎 [43] は大変よくできた数学史書であるので是非お薦めしたいが，それでも不明な点は残っている．[136] や [76] にも豊富な歴史的考察があるので，参考にしてほしい．ニュートンの流率法については [36, 155] が詳しい．著者の一人も [535] でニュートンの数学に関する私見を述べたので，ご覧いただければ幸いである．

さて，我々は極限に関する考察から始めよう．極限は現代数学にとってなくてはならない概念である．極限の概念は何もコーシーに始まるものではない．ニュートンは limit という言葉を使っていたし，微分を，fluxion（流率），the last ratio of evanescent quantity とか the ultimate ratio of evanescent quantity（消滅するものの究極の比）とかいう言葉で表現している．このことを確認するために，ニュートンの *Principia Mathematica* を少し読んでみよう[2]．以下において，量とは，時間 t が変わるにつれて変化するものである．つまり，量と言えば t の関数であると解釈するのが自然なのだが，関数という言葉は出てこない．ニュートンは，用語の定義や有名なニュートンの力学法則を説明した後，Book I において次の補題 1 を述べている（英訳 [213] の 433 ページ）：

補題 1

量も量の比も，任意の有限な時刻において 1 に近づき，その時刻の終わる前に，お互いの差が任意に与えられた量よりも小さくなるとき，それらは究極では一致する．

2 この有名な本はきわめて読みにくいことでも有名である．Andrew Motte による英訳 [213] があるが，1729 年の翻訳であることもあり，英語でありながらよくわからないことが多い．本書では 1999 年のコーエンらの翻訳 [213] を使うことにする．

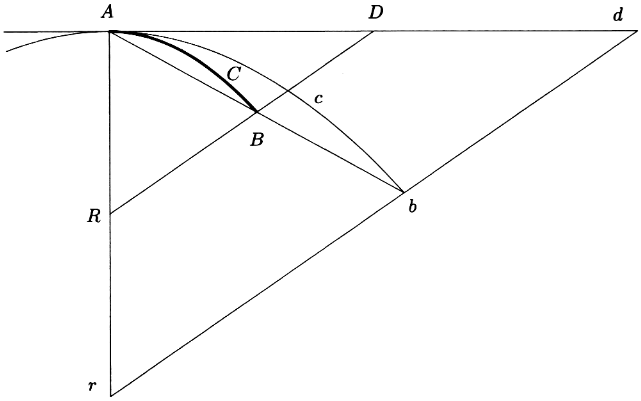


図 5.1 直線 ADd は曲線 ACB に点 A で接している．rd と RD は平行．

よくわからない言葉であるが，元々のニュートンの言葉からしてよくわからないので，こうした訳で勘弁していただきたい．少なくとも，なんとなく ϵ-δ 的な雰囲気は出ているから，ニュートンってすごい，と思われるかもしれない．もうひとつ読んでみよう（英訳 [213] の 435 ページ）．

補題 6

与えられた任意の曲線 ACB の弦 AB を延長する．さらに，連続的な曲率を持つ点 A において直線 AD が接し，両方向へ延長されているものとする．もしも A と B が近づきお互いに接近するならば，接線と弦のなす角度 $\angle BAD$ はいくらでも小さくなり，究極的に消滅するという．

補題 7

同じ仮定の下で，弧，弦，接線のお互いの究極の比は 1 に等しいという．

補題 7 の意味するところは，図 5.1 において，点 B が点 A に限りなく近づくとき，$\angle ADB$ が一定になるように D をとると，

$$\lim_{B \to A} \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \lim_{B \to A} \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}} = 1$$

ここで，B は図で太く記してある曲線に沿って A に近づくものとする．ニュートンはグラフを描き（図 5.1）幾何学的な直観でこれらの補題を証明している．図 5.1 において点 d を固定し，rd は常に RD と平行になるようにし，弦 AB を延長して rd との交点を b とする．弧 Acb は弧 ACB と相似になるようにする．そして

B を A に近づける．このとき b は d に近づくから，弧，弦，接線の互いの比は1に近づくというわけである．何とも楽天的な証明である．そもそもニュートンは究極の比 (ultimate ratio) とは何なのかを説明してはいない．それを説明しだすと議論は堂々巡りにならざるを得ないであろう．結局，無限小を使って説明しているのと大差ないことになってしまう．

彼自身は，究極の比が存在するかどうか疑っていたわけではなかろうが，それが本当に存在するかどうかを疑問に思う人々は当時にも当然いたわけで，そうした人々の批判を全く気にかけていなかったわけではない．その証拠に補題11の補足説明（[213] の 442–443 ページ）には次のような弁明の文章が見られる．極限の概念はここから出発するのであるから，少し長いけれども引用しよう．

> 消えゆく量の究極の比などというものは存在しないと反対される方々もおられよう．何となれば，消える前ならば比は究極のものではないし，消えた後では全く存在しないのだから．しかしながら，同じ議論によって，次のように議論することもできよう：そこで運動が止まるような場所に到着する物体には究極の速度は存在しない．なぜならば，物体がそこに到着する前には速度は究極のものではないし，それがそこに到着したときには速度は存在しないのだから．しかし，答えは簡単である．究極の速度とは，ある物体が運動が止まるその場所に到達する前でもなく，また，そこに到着した後でもなく，まさしくその物体が到着する瞬間の速度，すなわち，その究極の場所に到着するときにその物体が動く速度であると理解すればよいのである．同様にして，消えゆくものの究極の比も，消えゆく前でもなく後でもなく，消える瞬間の比であると理解すればよい．
>
> こうした，消えゆく瞬間における量の究極の比は究極の量の比ではなく，際限なく小さくなってゆく量の比が連続的に近づいてゆく極限（値）である．ここで，（極限値との）差は与えられたいかなる量よりも小さくなるように近づいてゆく．しかし同時に，その量が際限なく小さくなってゆく以前には決してその値を超えることはなく到達することもない．この問題は無制限に大きい量の場合にもっと明瞭に理解できるであろう．その差が与えられているふたつの量が無制限に大きくなってゆくならば，その究極の比は定まる．すなわち1となる．にもかかわらず，その比が究極の比にちょうど等しくなるような量を見つけることはできない．したがって，物事を理解しやすくするた

めに，以下では常に，大きさが確かに定まるような量を考える．しかし，無制限に小さくなってゆくような量を考える．

$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))$ のきちんとした定義を知っている現代人にはそれほど違和感はないかもしれないが，要するに極限という無定義用語を速度という別の無定義用語で置き換えただけである．ニュートンに心酔している人でなければ，これに納得するとは思えない．また，極限値に収束するというときには単調に収束してゆく，といったイメージしかないようでもある[3]．（この単調な収束というイメージは50年以上経た後のダランベールでも同じである．）

こうした状況であるから，微積分学にはできたときから賞賛と同様に批判も絶えなかった．ボイヤー（[97] の 213-214 ページ）によればニーウェンテイトが1694年に微積分学を攻撃し，「ニュートンの消えゆく量はあまりに曖昧であるし，極限に関する補題は理解できない」と述べたという．また，ライプニッツの無限小量についても疑問を投げかけたという[4]．こうした批判の中で最も有名なものは司教バークリー[5]によるものであろう．彼は『人知原理論 (*A treatise concerning the principles of human knowledge*)』[84] で彼の言う非物質主義哲学を展開し，数学を鋭く批判している．たとえば130節から引用すると，

> 近ごろ無限量に関する思索は甚だ盛んとなって，極めて奇妙な考想にまで進んでしまった．そのため，現代の幾何学者のあいだに小さくない疑惧と論議とを惹起してしまったのである．なかには甚だ高名な人で，有限な線を無限数の部分に分割できると唱えるだけで甘んじないで，更に進んで，それら無限小の各々はそれ自身他の無限な部分に，すなわち二次の無限小に，再分割できて，これを無限に続け得る，と唱道する者がいる．こうした人は実に，無限小の無限小の無限小があって，終末に達することは決してない，と主張する．それゆえ，こうした人に従えば，一インチは単に無限数の部分を含有するだけでなく，無限の無限の無限と無限に続く部分を含有するのである．［しかるにまた,］他の人たちがいて，一次の無限小より高次なすべての無限小は全く無である，と主張する．けだし，或る正の延長量すなわち延長部分を無限に乗じてなおかつ与えられた最小延長に決して等

3 すなわち，$\lim_{h\to 0}$ と言っても，$\lim_{h\downarrow 0}$ と $\lim_{h\uparrow 0}$ だけを考えているようである．また，$h \to 0$ のとき $y(a+h)\uparrow b$ あるいは $y(a+h)\downarrow b$ だけのようである．

4 ニーウェンテイトとライプニッツの論争については [48] にも詳しく書かれている．

5 George Berkeley (1685-1753).

> しくなりえないと想像することは不合理と考える立派な理由があるからである．しかも他方，或る正の実数根の自乗・三乗・その他の冪が全く無であるということは，上記の不合理に劣らず不合理であるように思える．が，一次の無限小を唱えながら二次以上の無限小をすべて否定する者は後者の不合理を唱道せざるをえないのである．([84] 大概訳)

とあり，無限小の使い方の非合理性を指摘している．

さらに有名なのは彼が1734年に書いた『解析家 (*The Analyst*)』[85] である．これは微積分批判に充ち満ちた書物であるが，その中にはたとえば，第I部第3章にあるような辛辣な批判の言葉が随所に現れ，当時の解析学の痛いところをついている ([41, 97, 170])．バークリーは数学者ではなかったし，微積分学の中身を真に理解していたわけでもなかろうが，哲学者としては間違いなく一流であったし，彼の解析学批判は正当なものであった．

これに対し，多くの数学者はバークリーの批判に答えようとしたが，成功したとは言い難い ([103, 155])．たとえばマクローリン[6]は1742年に *A Treatise of Fluxions* [201] を著して反論に努めた．これはニュートン流の微積分学のその当時における集大成であるが，その序文で，バークリーの『解析家』がこの本を書くきっかけであったと述べ，厳密な理論を展開し，バークリーに反論を加えたのである．グラビナー [432] の言うように，その数学的内容には後世に大きな影響を与えたものが多いけれども，彼の論理によって微積分学が厳密化されたと考える人はいない．マクローリンを含めてイギリスの数学者は（ニュートンに倣ったのであろうか）ユークリッド幾何学の枠組みで解析学を厳密化しようとしたのであるが，それでは成功しないのは今の我々には明らかなことである．マクローリン自身を含めて当時の人々はそれで成功すると思いこんでいたようであり，その呪縛から解放されるにはそれから80年ほどかかることになる．18世紀の中頃から19世紀の後半まで，イギリスの数学は一大停滞期を迎えることになり，マクローリンの大著はニュートン理論のどん詰まりの象徴である，というふうに言われるようになる[7]．しかし，こういった見方は必ずしも正しくはないようである ([432])．

---

6 Colin Maclaurin (1698-1746)．マクローリン展開やオイラー－マクローリン展開にその名を残している．

7 たとえば，ボールは [74] の 388 ページで次のように述べている．「マクローリンは 18 世紀における最も有能な数学者の一人である．しかし，英国における数学の発展に対する彼の影響は，全体的には不幸なものであった．解析学も無限小解析も捨て去ることによって，英国人にニュートンの方法に閉じこもるように誘導してしまった．そして，1820 年代にケンブリッジ大学のカリキュラムに微分学が導入されるまで，英国人は近代解析学の強力な方法を一般的に使うことはなかったのである．」

マクローリンはどの程度厳密であったのか，簡単に見てみよう．彼もニュートンのように時間 t に依存する変量 $x(t)$ を考える[8]．彼は x が時間に依存することを運動と呼ぶ．そしてその流率を定義する，すなわち，$t \mapsto x(t)$ から $\dot{x}(t)$ を定義するわけである．彼の定義は次のようなものである（第 11 節）．

> ある量が生成されている最中の任意の時刻において，その量が流れてゆく速度を流率と呼ぶ．したがって，流率は，その時刻以降に加速も減速もないように一様な運動をさせたときに，ある一定の時間にこの運動がもたらす増減によって計ることができる．あるいは，その時刻における運動と等しいような一様な運動の生み出す量によって計ることができる．

つまり，任意に運動しているものがある瞬間に外力を失ったと仮定して，それ以降は一様な運動（等速度運動）するときの速度が流率であると定義されている[9]．これはしかし，任意の曲線の任意の点で接線が存在すると仮定しているのと同じである．これで厳密であると信じていたわけであるから，厳密性という意味も時代によって変わるというグラビナーの説 [429] はもっともであると思う．また，そもそも厳密に理論展開するということが本当に必要なのかどうかも時代によって変わることではないだろうか．ニュートンの時代には論理的な厳密さが第一義的な関心の的ではなかったと見なければならない．**厳密さに対するある種の健全な鈍感さは近代数学の（そして現在数学においてもしばしば）重要な特質なのである．**

1750 年に出版されたシンプソン[10]の流率法の教科書 [235] でも流率は速度として定義されており，マクローリンと大差はない．イギリスでは時間に依存する量といい，関数という言葉は用いられていないけれど実質的には時間の関数が理解されているといってよい．

18 世紀中頃からイギリスの数学は停滞を見せ始める．ボールによれば，

> 18 世紀の当初，英国の数学は活気に満ちていて成果もあった．しかし，退廃が急速に始まり，マクローリンやシンプソンの死後，18 世紀後半の大陸の数学者に比較できるものは英国にはいなくなった．([74] の 391 ページ)．

8 彼もニュートンと同じく，関数という言葉は用いない．

9 ある瞬間における速さをこうしたやり方で定義するのは，ボイヤーによればオレームにまで遡るようである（[97] の 82 ページ）．

10 Thomas Simpson (1710-1761)．数値積分のシンプソンの公式にその名を残している．

現代数学の定義では，たとえば「○○○の性質を持つ△△△を□□□と呼ぶ」といった形に書かれる．ここで，○○○の性質を持つ△△△がもしも空集合になることがあっても，我々はそれを論理の破綻とはみなさない．ただ，その定義が役立たなくなるだけのことである．17, 18 世紀にはこうではなかったようだ．何かを定義するときにはそれが存在することが保証されねばならないと考えられていたように思われる．もしこの推測が正しいとすると，極限が存在するかどうか不明な場合があればそれは定義としてふさわしくないということになる．それが極限の定義の曖昧さに加わって排除の動きを加速したのかもしれない．ニュートンの説明を読むと，彼の定義は現代人の定義に近いという気がしてくる．極限の定義を与え，しかる後に極限の存在を吟味し，速度にたとえることによってその存在を読者に納得させようとしているように思える．後にマクローリンが「厳密に」理論を展開しようとしたときには存在が保証されるかどうかあやふやな極限というものを排除し，物理的直感からその存在が「自明な」速度を用いて定義している．現代人から見ればこれは改悪である．

一方，ヨーロッパ大陸では，ライプニッツが無限小量を使って微分を定義した．ultimate ratio と比べると無限小量の方が厳密さに欠けるけれども，直感的な理解はしやすくなる．無限小の量という考え方の歴史は古く，必ずしもライプニッツが最初ではない．ボイヤー [97] によれば中世から無限小の考え方は使われている．ガリレオの『新科学対話』([21] の上巻 57 ページ）には次のような有名な対話が見られる．

> **サルヴィヤチ**　無限にしても不可分にしても，別々に理解できないといふことです．ですから二つを一緒に結び合わせて考えてみませう．たとへば，不可分な点で線を作らうと思へば，無限の点を持って来なくてはなりません．それで無限も不可分も同時に理解しなくてはならないのです．(中略) 不可分に小さなものから連続的なものを作りあげる，といふことに向けられる主な反対論の一つはかうです．不可分なものに不可分なものを加へても，可分なものをつくることはできない．もしできるとしたら，最初の不可分なものも分割できるといふことになる．(略)
>
> **シムプリチオ**　さあ解けさうにもない疑問がでてきました．異なる長さの線分が存在し得ることは明らかです．しかもそれ等はいづれも無数の点を含んでゐます．それ故に同一種属の中に無限よりも大きなものが存在し得ることを認めざるを得なくなります．(中略) この或

> る無限量が無限よりも大きな値を持つといふ事は，全く私の理解の及び得ざるところです．

こうした素朴な考え方はライプニッツの頃になっても大して変わってはいない．無限小量あるいは不可分量を用いると様々な定義が簡単にできる．一方で，無限小量を普通の量と同格に扱うとすぐに矛盾が生ずるのは簡単にわかる．にもかかわらず，その便利さのため，また，何よりも，無限小量を使って導かれた結果はすべて正しかったのだから，これを捨てることはできなかった．ヨハン・ベルヌーイ [87] などは積極的に無限小量を肯定しており，次のように述べている：

公理

1. 無限小だけ増加あるいは減少させた量は増加も減少もしていない．
2. 曲線は無限に多くの無限に短い線分から構成されている．

公理 2 はまだ許せるとしても公理 1 は何だ，と言いたくなるであろう．[87] を下敷きにして書いたと言われている[11]ロピタルの微分学の教科書 [194] から引用して公理 1 を解釈すると次のようになる：

> 無限小しか違わない二つの量は無差別に取り扱ってよい．言い換えれば，ある量を無限小だけ増加させるか無限小だけ減少させるとき，元の量と変わらない．

無限小だけ増加させても変わらない，と宣言されている．これが公理のように扱われているわけである．公理 2 の方は，

> 曲線は無限小の長さの線分が無限に多く集まったものであると見なすことができる．言い換えれば，曲線は無限に短い辺をもつ多角形とみなされ，それらの辺の間の角度が曲率を定める．

無限小の長さの線分の間の角度とは何か，その説明はない．何となく雰囲気はわかるのだが，ユークリッドの原論のような説得力はない．これでは厳密性に欠ける，と思うのは現代人だけでなく，18 世紀でも納得しない人々がいた[12]．もう一度バークリーにもどってみよう．彼は（[85] の 5 節），

11 ロピタルの教科書は大変成功したのだが，これはヨハン・ベルヌーイの元本を改良しただけであるという話がある．関数の歴史の本筋ではないので，本書では述べない．[1, 112, 605, 612] を参照していただきたい．

12 ロピタルの教科書に対する論争については [518] を参照せよ．

> ...
>
> 流量や流率の代わりに彼ら（ライプニッツ学派の人々）は，無限小量を連続的に加えたり減じたりして増減するような有限の変化量を考える．それを使って有限の増分が生成されるような速度を考えるのではなくて，彼らは，それ自身が無限に小さいような増分（あるいは減分）を考えるのである．（中略）正直言って，無限小の量，すなわち，我々が想像できるあるいは感じ取ることができるいかなる量あるいは最も小さい量よりも無限に小さい量，を考えることは私の能力を超えている．さらに，そのような無限小の量の部分で，さらに無限に小さいもの，そしていかに無限に多くを集めても決して最微の有限量にはなり得ないものを考えることは，いかなる人間にも無限の困難であると思う．

バークリーやニーウェンタイトやその他の批判にもかかわらず，無限小量はその後ベルヌーイ兄弟やオイラーに引き継がれ，華々しい成功を収めることになる．奇妙なことにオイラーは，厳密性に対するこうした批判にはあまり興味を示さなかったように思える．オイラーは解析学の手法や概念を無限小量を使って説明した．無限小とはどのような量よりも小さい量であると定義される．そして，オイラーあるいは彼と同期の人々の書いたものを読むと，あるときは無限小量をゼロでないように扱い，あるときはゼロであるかのように使っている．オイラーは無限小量はゼロであると開き直っているときもあるし，そうでないときもある．オイラーから引用しよう．[140] の 87 節である：

> 無限小は無であるから，有限な量に無限小を付け加えたり減らしたりしても，その有限量は実際には増えもしないし減りもしない．a を有限量とし，dx を無限小とする．このとき，$a + dx$, $a - dx$, あるいはもっと一般に，$a \pm ndx$ は a に等しい．代数的に考えても幾何学的に考えても，$a \pm ndx$ と a の比は，等しいものの比であることがわかる．等しいものの代数的な比については明らかである：$ndx = 0$ であるから，次式を得る．
>
> $$a \pm ndx - a = 0.$$
>
> 一方，幾何学的な比が 1 になるというのは
>
> $$\frac{a \pm ndx}{a} = 1$$

> から明らかである．これから我々は，次のよく知られた規則を導くことができる：**無減小量は，有限な量と比べればゼロとしてよく，無視することができる．** この理由によって，無限解析は幾何学的な厳密性に欠けているという反対論は，自分の重みで地面に崩れ落ちることになる．なぜならば，絶対的に無であるものを除けば，何も無視されていないからである．したがって，この荘厳な科学において我々は，古代人の著作におけるものと同じ完全な幾何学的厳密性を保持していると主張することは完全に正しい．

これで納得した人々もいたが，納得しない人々もたくさんいた．いずれにせよ，解析学の基礎を厳密にするという作業は遅々として進まなかったと言ってよいであろう．カジョリ [325] は，

> ニュートンの記号法はダメだった．ライプニッツの微積分学の哲学は劣っていた．その結果として，両方のできの悪い部分が生き残ったというわけである．

と述べており（153 ページ），これがこの頃の状況だったのであろう．

現代の我々は無限小が量でないことを知っているからオイラーを笑ってしまうかもしれないが，無限小はきわめて便利な考え方であるので簡単には捨てられなかったのである．現代でも物理的な直感に基づいて微分の概念を説明する際に無限小を使うことは意味のあることであるし，物理学の講義ではこうしたやり方は有用である．しかし，それと数学的厳密さとはもちろん別物である．18 世紀の数学者も当然それを理解していた．前章の $\cos z$ のテイラー展開の導き方にしても，$n \to \infty$ の取り方に相当な無理があることが理解されるであろう．ユークリッドの原論のような，あるいは代数学のような，疑問の余地を残さない理論展開を必要としなかったわけではないのである．しかし，現代の我々には既知となっているように，問題はきわめて微妙なものである．18 世紀の人々にこれが解決できなかったのはそれだけの地盤ができていなかったからである．

オイラーやダランベールは理論や応用を進めることに夢中だったから，解析学を厳密にしようとする時間はなかったように見える．つまり，18 世紀の数学者には進むべき理論的発展や応用分野の開拓の道が大きく広がっていたから，ダランベールの “Allez en avant, et la foi vous viendra.”（前に進め．そうすれば確信は後からついてくるだろう．）のような考え方は，時代の精神というだけでなく学問的にも十分合理的であったと言ってよかろう．

結局，18 世紀の解析学はきわめて曖昧な土台の上に構築されていた[13]．そして厳密化の必要性は理解されていたものの，それをどう実行すべきなのかはボルツァーノやコーシーまで誰にもわからなかったのである．

一方，18 世紀の数学が間違いに満ちていて，それに誰も無頓着だったというのも極論過ぎる．級数の収束についていささかルーズであったのは確かであるが，級数の収束・発散を考慮しなかったわけではない．第I部第3章で述べたように，18 世紀の数学者は収束・発散を気にせずにただひたすら計算していたというのは当たらないのである．

まして 18 世紀も後半になると多くの人々がより厳密な理論構築を求め始めていたのは事実である．ダランベールは『百科全書』において「極限」を定義し（第I部第3章），それを基礎にして解析学の基礎が構築できると主張した．

彼の概念はかなり現代のものに近いとも見えるが，不等式だけで定義ができるとは思い至っていないし，変化量が決して極限値に一致しないとかいうのはニュートンの定義そのままである．したがって，単調な極限しか念頭にない．たとえば，彼の定義では $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ とはならないことになる．要するにまだまだ曖昧であることに気づいていない．あるいは幾何学的イメージと混乱しているのかも知れない．この『百科全書』の定義でも，この定義のなかで，円に内接する正多角形の辺の数を増やしていったときに，この多角形の極限が円であると説明している．こういうイメージだと確かに，「決して極限に一致しない」と断る理由もわかる．現代の定義のように数の不等式のみで定義を完結している形にはなっていないのである．

同じく『百科全書』[14]の中でダランベールは微分を

> 高等数学において微分量あるいはもっと簡単に微分とは，無限小量のこと，あるいは，与えられ得るどんな量よりも小さな量のことである．微分あるいは微分量と呼ぶわけは，通常，二つの有限量の無限に小さな差（片方がもう一方よりも無限小に大きい）を考えるからである．ニュートンとイギリス人は，量の時間に関する変化と考えているので，これを流率と呼んでいる．

と定義している．無限小の δ に対して $f(x+\delta)$ が $f(x)$ よりも常に大きいか常に小さいか，そういう状況しか考えていないことに注意してほしい．そして具体的な例を挙げた後で，「微分の方法はきわめて重要であるが，理解するのも難しい．多く

13 くどいようであるが，曖昧であったからこそ先へ進むことができた．
14 第4巻，1754 年，985 ページ．

の数学者，たとえばロル氏は微分の存在を否定し，この原理を間違ったものであると主張している．しかし，微分の原理から得られる結果はすべて正しく，他の方法で得られるよりもずっと簡単にしかも確実に結果に到達できる.」とその有用性を強調する[15].

このように進むべき正しい方向を見抜いていたダランベールであるが，系統的理論を作ったわけではない．新しいアイデアを生み出すことにかけてはダランベールは天才的であったが，理論を体系的にまとめるといった能力には欠けていたと言わざるを得ない．

5.2 ラグランジュの貢献

このように，18 世紀も後半になると解析学を厳密な基礎の上に打ち立てようとする機運がでてきた．ラグランジュはここで，解析学の代数化という主張をするようになる（当時は，厳密な枠組みとしてはユークリッド幾何学と代数しかなかったのである[16]）．これは『解析力学』[188] の中で，「力学は解析学の一部に還元された．一切の幾何学的直感はもはや必要ない．一切が代数的な操作で行われる.」と主張して力学の代数化を唱えたことと平行しているようである．

1784 年，ベルリンのアカデミーは無限大に関する懸賞論文を募集した ([180, 429])．ここで要求されたのは解析学の厳密化であった[17]．グラビナー [150] の言うように，この時点で「解析学の厳密化」が重要な未解決問題として認識されたわけである．

懸賞の説明文は次のようになっている：

> 数学において無限大と呼ばれるものの明瞭かつ正確な理論．
>
> 高等幾何学では無限大や無限小がひっきりなしに使われている．しかしながら，古代の数学者と同様に幾何学者はこれまで，無限に大きくなって行くものを慎重に避けてきた．さらに，現代の解析学者の大

15 ロル (Michel Rolle, 1652-1719) はロルの定理（$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続で，かつ $a<x<b$ で微分可能とする．もし $f(a)=f(b)$ ならば区間のどこかの点 c で $f'(c)=0$ となる.）で有名な数学者であるので，彼が微分を否定している，というのは奇妙に感じられるかも知れないが，我々が知っているロルの定理は後世の人がロルの結果を微分の言葉に翻訳したものである ([322])．

16 ルネッサンス期に代数が発展したとき，代数学の方法を正当化するために幾何学の証明が用いられていた ([106])．しかし，18 世紀後半ともなると，代数学は幾何学とは別の独自の体系と認知され，それ自体で厳密なシステムとなっていた．

17 *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* (1784 年)，12-14 ページ．ラグランジュはパリに移るまではベルリンアカデミーの数学主任教授をしていたから，この懸賞はラグランジュの影響を受けて掲げられたものであろう．

> 多数は，無限大量は矛盾した存在であることを認めている．そこでアカデミーは，どうしてこんなに多くの正しい定理が矛盾した仮定から導かれるのか説明することを要求する．そして，確実かつ明瞭で，つまり一言で言えば真に数学的な原理で，無限大無しにすませることができ，しかし難しくなり過ぎることもなく，長過ぎることもない原理を示してほしい．しかもこれが完全な一般性と厳密性を保持し，明瞭で可能な限り簡単なやり方で行ってほしい．

賞はドゥカート金貨 50 枚分の重みの金から作られたメダルであるとされている．今の日本では数十万円の価値であろうか．

賞はリュイリエ[18]という人物に与えられた．彼の理論を総括すれば，ダランベールのように極限の概念をもって解析学の基礎付けを試みたと言えるであろう．実際，リュイリエの論文はベルリンアカデミーから 1786 年に本として出版されている ([193]) が，それは極限の定義から始まっている．第 1 章の章題が「変化量や変化量の比の極限について，すなわち，微積分学の第一原理について」である．そしていきなり，

> 与えられたひとつの定量があって，それよりも常に大きいか常に小さくなっているような変化量があるものとする．そしてその定量と変化量の差が与えられたいかなる量よりも小さくなるものとする．このとき，この定量は変化量の大きい方からの（あるいは小さい方からの）極限と呼ばれる．

常に大きいかまたは常に小さいという（単調な）収束のイメージがなければかなり現代的な定義に近づいていることが見て取れる．実際，変化量と極限値を対比させており，現代の定義に近づいている．しかし，ダランベールのしがらみから抜け出ていないのも事実である．ϵ-δ の ϵ はあっても δ がないという印象を受ける．

リュイリエの理論はダランベールよりは進んでいるし，テイラー級数という言葉が用いられたのはこの本が最初らしいし，優れた点も多いが，なぜか彼の本はあまり読まれなかったらしい．しかし，彼の理論は間違っていなかったし，注目すべきところも多い（ボイヤー [97]）．dy も dx も意味はなく，dy/dx だけが意味を持つ，と主張したのは彼が最初のようである．

ラグランジュはリュイリエの論文には満足していなかった．その証拠に，その後

18 Simon Antoine Jean L'Huilier (1750-1840)．オイラーの多面体定理は穴がある場合（つまりトーラス面のような場合）には修正が必要であることに気づいた最初の人物でもある．

ラグランジュは自分自身で解析学の厳密化に取りかかる．

ラグランジュの解析学の厳密な基礎付けは彼の理工科学校の教科書 [186, 187] で展開されている．彼がとった方法は解析学の代数化である ([150, 152])．実際，彼の本のタイトルは非常に長いもので，

> 無限小に関する考察も消えゆくものも極限も流率も含まず，有限量の代数解析に帰着されるような微分学の原理を含む解析的な関数の理論．

その方法とは，形式的べき級数を出発点としてすべての操作を記号の代数的演算ですませてしまうという方法である．これによって極限とか無限小が追放された理論体系が可能になったと彼は信じたのである．

彼の本は当時の人々にはずいぶんと読まれて，大きな影響を与えたようである．たとえば，彼はこの中で導関数 (dérivée) という言葉を使用し，英語の derived function もしくは derivative となって今でも使われている．しかし，すべての関数がべき級数で表されるということを暗黙のうちに仮定しているのであるから，よく読めば厳密な理論になっていないことは明らかであろう．実際，[362] によれば，そもそも展開可能なのかどうかに関する疑念は，早くは 1801 年から出ていたようである[19]．

ラグランジュ [186] の数学史における位置付けについて詳しく述べる余裕はないので，[150, 151, 152] を参照してほしい．[186] の最大の意義は，むしろその中で展開されている様々な不等式がボルツァーノやコーシーの理論の引き金となったことである ([150, 151])．

ラグランジュは極限を基礎に据えるのではなく，べき級数展開を基礎に据えるという，今の我々からすれば荒唐無稽とも思えるやり方で解析学を正当化しようとした．もちろん，これが正しいわけはないのであるが，彼はこれをもって厳密化はできていたと思っていたらしい ([151])．彼の教科書はヨーロッパ中で広く読まれていたらしく，その後に大きく影響を与えた[20]点できわめて重要である．後に続くボ

19 一例を示そう．A. Burja という今では完全に忘れ去られている数学者が 1801 年に論文を書いた [318]．様々な関数をべき級数に展開した後で，彼は（21 ページ）疑問を呈する．おおよそ次のような論述である：「簡単な代数関数については経験によってべき級数展開可能であることがわかる．だからといって，もっと複雑な関数についてもそうだと言えるわけではない．ラグランジュは *Theorie des Fonctions Analytique* において，このことをまったく一般に証明しようとしている．しかし，彼の証明が何ら疑問の余地のないものであるというわけではない．彼の証明は，べき級数の形で展開できるという部分と，その係数がテーラーの定理で表されるという部分の前後半に分けることができるが，後半はいいけれども前半ははたしてどうか．」

20 [151] の 79-80 ページ．

ルツァーノやコーシーも間違いなくこの教科書を読んでおり，それを乗り越えようとして現代的な解析学が整備されたのである．問題のある理論であるとは言え，この本には今日でも我々がお世話になるいろいろなアイデアが初めて現れたという点でも重要である．たとえば，我々がテイラーの定理という形で知っている次の定理は，この形ではないけれども実質的には [186] に現れていると見なすことができる ([151]).

定理 5.1 f は $[a,b]$ で C^n 級とし，$f^{(n)}$ は (a,b) で微分可能と仮定する．このとき，

$$R_n(x,h) = f(x+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k$$

とおく[21]。このとき $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$R_n(x,h) = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

となる．

テイラー[22]はこのような形の定理を書いたわけではなくべき級数を形式的に書き下しただけである．剰余項がどうなるかに着目したのは [186] が最初であろう．これ以外にも様々な不等式を活用しているところなど，コーシーの理論の先駆けとおぼしいところも多い[23]．また，次の補題[24]などは，彼以前には自明であるとされて，証明しようとさえされなかったであろう．

補題 5.1 f' が (a,b) で至るところ正ならば $f(a) < f(b)$ となる．

19 世紀初めにはガウスも超幾何級数の収束について考察を始めている ([420]). 19 世紀になると地盤はかなり整備されてきたので，ボルツァーノやコーシーによって始められた解析学の厳密化が進むことになるが，そのきっかけは，18 世紀中に解析学の概念整備がほぼ一段落したという事実と，ダランベールやラグランジュによる解析学の基礎付けに対する情熱であった．ダランベールは無限小量が意味のないものであることをはっきりと認識していたから，解析学を無限小ではなく極

---

21 いわゆるラグランジュの剰余項である．

22 Brook Taylor, [253].

23 [151] の 3 章．

24 [186] の 78 ページ．現代の我々にはこの補題は不正確である．f が閉区間 $[a,b]$ で連続であるという仮定も必要だからである．しかし，ラグランジュがこれを書いた時点では現代的な連続性の定義は存在していなかったことを忘れてはならない．

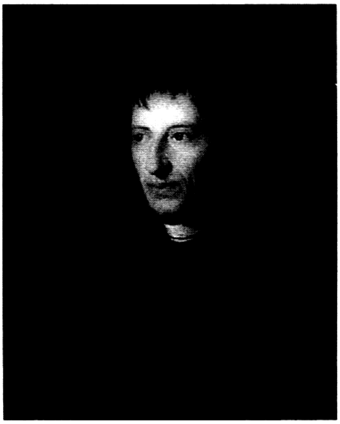
 

図 5.2 左：プラハにあるレリーフ．ボルツァーノがすんでいた家（[519]）に飾られている（2007 年矢崎成俊氏撮影）．右：ボルツァーノの肖像画．全集 [228] より．

限をもとに理論付けるべきだと主張しており，これは当時の人々にも影響を与えていた．しかし，では，「極限」という言葉でもって何を意味するのか，彼が説明できたとは言い難い．ϵ と δ を使った極限の定義は存在していなかったのである．一方，ラグランジュは微分学の基礎にべき級数展開をおいた．しかし，これでは形式的べき級数の理論を打ち立てるかあるいは解析関数だけの世界を考えるか，どっちかしかあり得ない．彼のもくろみは最初から無理なものであった．ここには歴史の皮肉とも言える失敗がある．厳密ではなかったとは言えダランベールやリュイリエが追求した方向はまさしく現在の我々が使っている理論付けであり，ラグランジュのやろうとしたことは今から見れば改悪とも見える．

ダランベールもラグランジュも失敗したとは言え，解析学を厳密に展開しようと試みたことは事実であり，これは強調されるべき事実である．失敗も立派な業績の一つに数え得る場合もある．彼らの（特にラグランジュの）試みは評価されるべきである．

5.3 ボルツァーノの貢献

第 I 部でも述べたように，現代的な連続関数の概念が最初に現れるのは 1816 年（[314]）である．この論文の目標は，いわゆる二項定理

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

を厳密に証明することである．彼は，α が自然数でなければ，この定理は $-1 < x < 1$ でのみ意味を持つことを断言しているので，オイラーやラグランジュがべき

級数を取り扱ったやり方とは一線を画している．この論文には勘違いも無いわけではないが，べき級数に対する彼のこの態度といい，29節に現れている連続関数の定義といい，まさしく画期的な論文である．翌年チェコのプラハでボルツァーノが公表した小冊子[315]では，中間値の定理が，いかなる幾何学的直感も排して純粋に解析的に証明される．中間値の定理はそれ以前の文献にも現れてはいるが，「グラフを書いてみれば明らか」といった直感的な説明ですませていたようである[25]．幾何学的直感によらない，純粋に解析的な証明が必要であると感じているところにボルツァーノの歴史的意義がある([41])．もっともこの論文を読むと彼が代数学の基本定理を強く意識していたことがわかって大変面白い．代数学の基本定理「すべての多項式は少なくともひとつ複素数の根を持つ」はガウスが初めて証明した．1799年のことである．ところで，その定理を証明しようとすると，どのような証明をしてみても必ず「奇数次の実係数多項式は少なくともひとつの実根を持つ」という命題もしくはそれと同値なものに頼らざるをえないが，これはすなわち中間値の定理の系であるから，中間値の定理を幾何学的直感に頼らずに証明せねばならない，と彼は考えるのである．

ボルツァーノによる連続関数の定義第I部3.1は画期的である．近代的な連続関数の定義が独立項目として初めて現れたのがボルツァーノの小冊子なのであり，数学史上の記念すべきできごとであると言えよう．しかも，ボルツァーノ以前の多くの数学者にはフーリエを除き，関数の定義域が必ずしもはっきりしなかったのが，彼の論文では定義域をはっきりと認識していることにも注意すべきであろう．

ボルツァーノは1781年プラハ生まれのチェコ人である．父親はイタリア人であった．1848年プラハに没([580, 228])．彼は主として神学者・哲学者であり，数学は余技といった面が強いが，今日的な意味での連続関数の概念に初めて到達した人間であるという事実だけでも歴史に残ることができる．これに加えて，彼には様々な数学上の業績がある．中間値の定理を初めて証明したことや，後で述べる連続だがどのような開集合でも単調でない関数の発見，あるいはコーシー列の概念にコーシーにさきがけて到達していること，いわゆるボルツァーノ－ワイエルシュトラスの定理を見つけたこと，無限集合に関する研究，ジョルダンの閉曲線定理を述べていることなどである([228])．また，右連続や左連続という概念にも気づいていた．彼は実に綿密に考えることができたようで，中間値の定理の逆が成り立たないことも反例を挙げて示している（[228]の471,472ページ）．

彼はまた，中間値の定理に連続の仮定が必要であることも力説しているが，その

25 たとえば[137]の33節や[497]を見よ．

中で彼は，関数 $x+\sqrt{(x-2)(x+1)}$ は $x=2$ で正，$x=-1$ で負であるが $-1<x<2$ のいかなる値でもゼロにはならないと言っている．そしてこれは連続性の仮定が満たされないからであると言っている[26]のであるが，これは我々現代人には奇妙である．「関数が複素数値ならば中間値の定理は成り立たない」という注意ならばわかるのだが．もちろん，この頃には複素数に市民権がなかったのであろうから，彼の頭の中には連続と言えば自動的に実数値関数という図式があったのであったのかもしれないが，我々にはよくわからない．

彼は次のような関数も考えている．$f(0)=0, f(1)=1/2$, x が有理数ならば $f(x)=x/2$, x が無理数ならば $f(x)=x$. このとき $f(0)=0$ と $f(1)=1/2$ の間の任意の数は適当な $x\in[0,1]$ によって $f(x)$ で表される．すなわち，f は $x=0$ 以外では不連続であるが，$f([0,1])\supset[0,1/2]$ となる． ディリクレ [364] よりも数年後であるからボルツァーノは [364] を読んでいた可能性が高いが，それにしても関数を，有理数と無理数でばらばらに関数値を定義しているところに，ボルツァーノの大きな先見性を認めざるを得ない．しかし，彼のような偉大な思想家でも間違いを犯すことはある．たとえば，彼は多変数の実関数について，「各々の変数ごとに連続であれば多変数関数として連続である」という定理を書いているが，これはもちろん正しくはない．不思議なことに同じ間違いをコーシーも犯すのである．

ボルツァーノは神学者としてはあまりに過激であったため大学から追われ，その後は著作に専念した，しかし彼の著作の大部分は生前には印刷されず，19 世紀後半にドイツで再評価されるまで数学の流れに影響を与えることは少なかった．ボルツァーノについては [580, 167, 41, 112] を参照されたい．

さて，ボルツァーノの小冊子はほとんど読まれなかったため，彼の後世への影響はほとんどなかったと思われている．しかし，アーベルはボルツァーノを賞賛しているという．実際，アーベルの手書き原稿の一部には，「私が調べたところに寄るとボルツァーノは賢い男らしい」と読める部分がある ([248]).

5.4 コーシーの貢献

ここでコーシー[27]の登場となる．19 世紀前半の数学者の中でガウスと並んで最も重要な人物である．さて，コーシーが解析学を厳密な基礎の上に構築しようとしたのは彼のエコールポリテクニクにおける教科書 [107, 108] である．このうち，後者の目的は前者の厳密性を，無限小量を使うことによって「やわらげる」ことであ

26 彼の連続性の定義の脚注．[315] の 11 ページ．
27 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

ったという．[108] の「まえがき」には，

> 筆者は，『解析力学』のあの高名な著者が，彼の導関数の理論の基礎に関するこの公式を採用したことを無視するものではない．しかしながら，このかくも偉大な権威にふさわしい一切の敬意をとりあえず置くとすれば，発散級数を利用して得られる諸結果についての不確実性は，[いまや] 大多数の数学者が一致して認識しており，さらに附言すれば，多くの場合について，テイラーの定理が関数を収束級数への展開を与えてくれるように見えるのに対し，この級数の和は提示された関数とはまったく異なる（『講義』38 講の終わりを見よ）．拙著の読者諸兄は，筆者が期待するところでは，微分法の諸原理とその最も重要な様々な応用は，級数を介在させることなしに簡単に叙述することができると確信なさることであろう．

とある．解析力学を著した高名な著者とはラグランジュのことであり，ここにはラグランジュへの強烈なライバル心が見られる[28]．

彼のエコールポリテクニクにおけるこれらの教科書は，厳密性に関してそれまでの教科書とは明白な違いをもっており，まさに画期的なものと言うことができる．級数の収束と発散についても明白に述べているし，（彼が [108] のまえがきで述べているように）不定積分の存在を証明しようとした[29]のも彼が最初であろう．不定積分の存在を言うためにまず定積分を定義してそれを関数と見なしたときにそれが不定積分になるということ，つまり，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

を証明したのもここに初めて現れるものである[30]．それまでこの等式は定理というよりはむしろ定義だったのである．

コーシーは関数 $\exp(-1/x^2)$（ただし，$x = 0$ ではゼロと定義する）の原点におけるテイラー展開の係数がすべてゼロになることを示した ([108, 334])．これは，実関数論をべき級数展開のみで厳密化することができないことの決定的証拠となるものである．

コーシーは解析学の厳密化の祖であるかのように言われているが，解析学の厳密

---

28 ラグランジュが書いたものを読むと意識的にオイラーへの言及を避けているという感じを受ける．これもライバルへの敵対心なのかもしれない．

29 あるいは証明すべきことであると認識したと言うべきか？

30 [108] の 152 ページ．あるいはその和訳の 123 ページ．

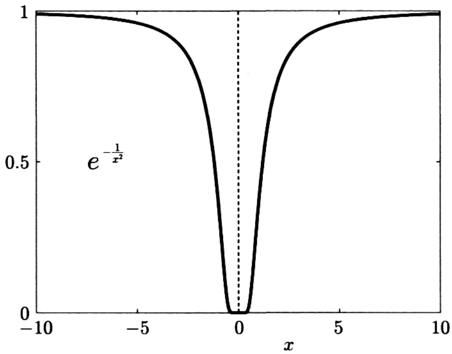


図 5.3 関数 $\exp(-1/x^2)$ のグラフ．原点近くで急速に減衰するので，あたかも恒等的にゼロとなっているところがあるように見えるが，実際にはゼロとなるのは $x=0$ だけである．

化は（失敗したけれども）ラグランジュによって始められ，プラハでボルツァーノというあだ花が咲いてその後，コーシーとワイエルシュトラスの二人によって完成したものと言えよう．コーシーの功労が第一であることは認めるが，ラグランジュの試みは高く評価されねばならない．ボルツァーノもコーシーもラグランジュの著作を読むことによって厳密な解析学を構築することに意義を見い出したに違いない ([150])．つまりやる気になったのである．コーシーの方法とラグランジュの方法はあまりにも違うが，そのことがコーシーがラグランジュを無視したことにはならないのである．ラグランジュの欠点をとことん突き詰めたからこそ完全に新しいアイデアで出発することができたのである [150, 151]．

コーシーは他人のアイデアでもそれを引用せずに書くことはしばしばであったし，あっちこっちに書き散らしたものの中には互いに矛盾することも多い．有名な「間違い定理」に次のものがある（[107] の 120 ページ，英訳の 90 ページ，和訳の 87 ページ）：

定理 5.2 級数 (1) の[31]各項が同じ変数 x の関数であり，この級数が収束する特定の値の近傍においてこの変数に関して連続ならば，この級数の和 s も，この特定の値の近傍で x の連続関数である．

ここで，収束が各点収束であるか一様収束であるか，といった考察はしていない．文字通り読めば各点収束である．だとすれば，この定理はもちろん正しくない．しかし，当初誰もこの間違いに気づかなかった．最初に気づいたのはアーベルで，1826 年のことである（後述）．また，多変数関数の連続性で勘違いしていたことも

31 級数 (1) とは，$u_0+u_1+u_2+\cdots$ のことである．

有名である．すなわち，多変数関数が各々の変数について連続ならば多変数関数として連続であるという間違った「定理」を堂々と書いている[32]．このように，コーシーにも勘違いは多く，解析学の厳密化は徐々に進んでいったと見るべきであろう．コーシーが必ずしも厳密でないことは認識されていたようで，たとえばヤコビ[33]は

> 完全に厳密な証明というものを知っていたのはディリクレだけだ．ガウスでもなければコーシーでもなければましてや私でもない．⋯ガウスが証明できたと言えばそれは極めて明解であった．コーシーが同じことを言ってもおみくじのようなものだ．しかし，ディリクレができたと言えばそれは間違いのない事実である．

と言ったと言われている（[231] の 558 ページ）[34]．

どうすれば微積分学の理論がが厳密に展開できるかは，多くの人々に少しずつ認識されていったようである．そんな中で各点収束と一様収束の違いが認識されていったらしい．歴史上一様収束の概念に最も早く到達したのはワイエルシュトラス[35]で 1841 年頃のこと ([623]) であると言われている．しかし，この論文は彼がまだ学生だったころに書かれたもので，出版されたわけではない．また，一様収束 (gleichmässig convergirt) という言葉は使われているが，それを定義しているわけではなく，ただ一方的に使っているだけである．だから，この一編の論文だけから，彼が一様収束をどの程度正確に把握していたか，あるいは，どの程度重要な概念であると思っていたかを推し量ることはできない．ワイエルシュトラスが学生のときに最も影響を与えたグーデルマン [437] の 251 ページから 252 ページにかけても一様収束の概念が見える．しかし，これも言葉をただ使っているだけで，その意味するところを正確に定義しているわけではない．ここで，たとえば，

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2} \tag{5.1}$$

といった関数列を出して，これが 0 を含む区間の各点でゼロに収束するが，一様収束はしない，といった議論があれば別であるが，それはない．ワイエルシュトラスに影響を与えたという間接的な影響以外に数学界に与えた影響はないものと思われる．

---

32 [107] の 47 ページ．

33 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851).

34 そうは言っても，ディリクレも「ディリクレの原理」を証明なしに用いていたのだから，誰にでも限界というものはあるようだ．

35 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

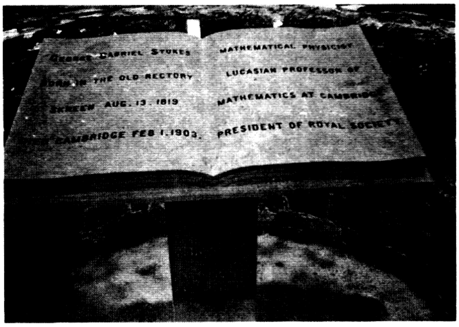


図 5.4 ストークスの生まれ故郷（アイルランドのスクリーン）にある墓標[36]（セント・アンドリュース大学の A. クレイク氏ご提供）.

しかし，その後ワイエルシュトラスはベルリン大学で彼が行った講義の中で一様収束について詳しく述べ，現在我々が知っている「一様収束すれば項別積分ができる」あるいは，連続関数の列が一様収束するならば収束先も連続関数である，といった定理に到達した（論文を出版しないのはワイエルシュトラスにはよくあることで，彼の場合新しいアイデアを論文にすることの方が少なかった）．印刷公表されたものの中で最も古い一様収束の概念はストークス[37][601] であると言われている．それとほぼ独立にザイデル [586] もこの概念に気づいて公表している．ただ，彼らはどちらも，我々が知っている一様収束の定義を与えたわけではない．

ストークス [601] は現代の教科書にあるような厳密さで書かれているわけではないし，不鮮明なところもあるが，現代の一様収束にかなり近づいていたことは間違いない．ちょっと寄り道をして彼の主張するところを覗いてみよう．彼は [601] の第 3 節で，h の関数 $v_n(h)$ の級数

$$V(h) = v_1(h) + v_2(h) + v_3(h) + \cdots \tag{5.2}$$

を考える．各 v_n は $h = 0$ の近くで定義されており，そこで $V(h)$ は確定値を持つものと仮定する．さらに，

36 墓標には次のように書いてある．

GEORGE GABRIEL STOKES	MATHEMATICAL PHYSICIST
BORN IN THE OLD RECTORY	LUCASIAN PROFESSOR OF
SKREEN AUG 13, 1819	MATHEMATICS AT CAMBRIDGE
DIED CAMBRIDGE FEB 1, 1903.	PRESIDENT OF ROYAL SOCIETY

37 流体力学の基礎方程式であるナヴィエ－ストークス方程式に彼の名前は刻み込まれており，19 世紀の流体力学や光学で大きな足跡を残した．ケンブリッジ大学のルーカス教授であり，主として物理学の世界での業績が多い（[115] の 187-20 ページ）．クレイク [115] はストークスのみならず 19 世紀イギリスの科学界・教育界のおもしろい一面を描いており，一読をお勧めする．また，[348] にもストークスの簡単な伝記がある．

$$\lim_{x\to 0} v_n(h) = u_n$$

が確定し,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

が確定値 U を持つものと仮定する．このとき $\lim_{h\to 0} V(h) = U$ かどうか，という問題を彼は設定する．現代の言葉で言えば,

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{h\to 0} v_n(h)$$

かどうか，ということである．ストークスは，必ずしもそうはならないことを注意し（[601], Papers，の 280 ページ：章末演習問題参照)，引き続いて次の定理を証明する．

定理 5.3 h がゼロに収束するときに，(5.2) の収束が無限に遅くならない限り，V の極限は U に一致する．

級数の収束が無限に遅いというのは，次のことである：任意に選んだ小さな数 e よりも剰余項が小さくなるためにとるべき自然数を n とする．このとき，h がゼロに収束するときに n はいくらでも大きくなってゆく（[601] の第 3 節).

彼の証明は我々が現在証明するものとほぼ同じである．きわめて不思議なことに，ザイデル [586] も全く独立にほぼ同じ形の定理を発見しているのである．ストークスやザイデルのいうところの，「連続関数列が収束するとき，ある部分での収束が他の部分に比較して無限に遅くはならないならば収束先は連続関数である」の意味は 100% 明快とは言えないので理解しづらいところもある．ハーディー [452] やグラッタン・ギネス [152, 434] にはこの辺の歴史に詳しい．ハーディー [452] もそうであるが，アーベルが一様収束の概念に到達していたという解説は多い．しかし，グラッタン・ギネス [152] はそうは見ていない．我々はグラッタン・ギネスの説に賛成するが，その理由は 5.5 節で後述する．1853 年のコーシーの論文 [342] になると我々の知っている一様収束と同じものが出ている．結局この論文が一番古いものであるということもできる．こうして見てみると，一様収束という概念が整備されるにはかなりの紆余曲折があったということがわかる．ボアス [312] によれば，1930 年代のハーバード大学では一様収束について教えてはいけないというルールがあったということである．学生に理解させるには複雑過ぎるという判断だったらしい．もちろん，現在のアメリカの大学では一様収束をきちんと教

えているのであるが，誰にでもすぐに理解できるという概念でないことがここからも見て取れる．中根 [42] にも一様収束の歴史が解説されているので参考にしていただきたい．

次に，$[a,b]$ を有界閉区間とする．すべての自然数 n について $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $x \in [a,b]$ の連続関数であるとし，各 $x \in [a,b]$ で有限確定な

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

が存在すると仮定する．この状況にどのような条件が加われば U は連続となるであろうか？ $\{u_n\}$ が一様収束すること，すなわち，

$$\forall\epsilon, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N};\quad \forall n_1 > \forall n_2 \geq n(\epsilon);\quad \forall x \in [a,b],\quad \left|\sum_{n=n_1}^{n_2} u_n(x)\right| \leq \epsilon.$$

はひとつの十分条件である．級数の各点収束は仮定されているから，

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

は有限確定となる．だから，

$$\forall\epsilon, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N};\quad \forall m > n(\epsilon);\quad \forall x \in [a,b],\quad |r_m(x)| \leq \epsilon$$

と書いても同じことである．しかしこれは必要条件からはほど遠い．

定理 5.4 すべての u_n は $a \leq x \leq b$ で連続とし，各点で $U(x)$ が有限確定となるものとする．このとき，U が $\xi \in [a,b]$ において連続であるための必要十分条件は，次の条件が成り立つことである．任意の $\epsilon > 0$ に対してある n とある δ が存在して，$|r_n(x)| < \epsilon$ が $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ なるすべての x について成立すること．

ディーニはこの定理を本質的には証明した（[128] のイタリア語原著の 107 ページ，独訳の 143 ページ）と言ってもよいが，この形で正確に述べたのは掛谷宗一 [479] であろうかと思う．証明は決して難しくないので，演習問題とする．ハーディー [452] は，定理 5.4 の条件が成り立つときに，$\sum u_n$ は点 ξ で準一様収束する，と呼んだ[38]．

38　ディーニは単純一様収束と呼んだが，ハーディーの呼び方の方がよいと思う．

ディーニは他にも重要な結果をいくつも導いたが，次の定理は有名である[39]．

定理 5.5 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数で，すべての n とすべての $x \in [a,b]$ について $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ をみたし，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が各点 x で存在するものとする．最後に f は $[a,b]$ で連続であるとする．このとき $f_n \to f$ は一様収束である．

コーシーが解析学の教科書を発表した 1821,23 年以降，コーシー流の厳密化はアーベルなどの数学者には熱狂的に迎えられたが，一挙に主流となったわけではない ([180])．一例として上でも触れたストークスの論文に戻ってみよう．これはコーシーの教科書が書かれてから 25 年もたって書かれたものであるが，そこの第 1 節でストークスは，

> 一変数関数に対して**不連続**という言葉はふたつの全く異なる意味で使われてきた．あるときは，ある端点の間の変数に対する代数的表現が，別の端点の間における表現と違っている場合に，その関数は不連続と呼ばれた．あるときには，x の関数 $f(x)$ が，すべての x に対して，h を十分に小さくすれば $f(x)$ と $f(x \pm h)$ との差が与えられたいかなる値よりも小さくできるときに連続と呼ばれ，そうでないときに不連続と呼ばれる．

と述べている．オイラー流の不連続性はまだ死んでいないのである．

以上，様々な事実を羅列してきたが，[107, 108] が近代数学に巨大な足跡を残したことを否定するものではない．オイラーもラグランジュも，関数が微分できることは当たり前であって，疑問に思うことは無かった．しかし，コーシーは微分できることもありできないこともあることをちゃんと理解していた．[108] には微分係数の定義がきちんと書かれている．これは大きな進歩であろう：

> 関数 $y = f(x)$ が変数 x の与えられた 2 つの限界の間でずっと連続で，この変数に，当該の 2 つの限界の間に含まれるある値を割り当てるとき，この変数に付与される無限に小さな増分は，関数自身にも無限に小さな増分を産み出す．したがって，$\Delta x = i$ とおくならば，差分の比
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

39 [128] の 99 節．

> を構成する二者は，無限に小さな量となろう．しかし，これら二者が限りなく，同時に極限 0 に接近する一方で，比自身は，正であるにせよ，負であるにせよ，もう一つの極限に収束しうる．この極限は，もしそれが存在するならば，個々の x の値に対して確定した値をもつ．ただし x が変わればこれも変わる．

近づくとか極限値とかはこの部分よりも前に定義されているから，これは現代の定義と同じである．

コーシーは多大の著作を残し，その研究は純粋数学から応用数学・力学まで多岐にわたっている．彼のいくつかの業績を紹介しよう．方程式の根を近似的に求める方法にはいろいろなものがあるが最も有名なものはニュートン法であろう．これは，まず x_0 を適当に定め，

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

によって逐次近似を行うものである．これは，初期条件が真の根に十分近くないと収束しないという欠点があるけれども，初期近似値が真の解に近ければ極めて早く収束するという利点がある．コーシーはニュートン法が二次収束することを実質的に証明しているが，これはニュートン法の歴史では画期的なことである ([546])．

ニュートン法ほどの精度は出ないけれども確実に根に収束する近似法として二分法 (bisection method) がある．これは元々ラグランジュの開発した方法で ([185])，現在では次のような形で説明されることが多い．まず，a_0 と b_0 を $f(a_0)f(b_0) < 0$ となるように選ぶ．ここでは $f(a_0) < 0, f(b_0) > 0$ としよう．$x = (a_0 + b_0)/2$ とし，$f(x)$ を計算する．もし $f(x) = 0$ ならば x が根である．$f(x) < 0$ ならば $a_1 = x, b_1 = b_0$ と定義し，$f(x) > 0$ ならば $b_1 = x, a_1 = a_0$ と定義し，次のステップに進む．すなわち，$x = (a_1 + b_1)/2$ として，$f(x)$ を計算し，もし $f(x) = 0$ ならば x が根である．$f(x) < 0$ ならば $a_2 = x, b_2 = b_1$ と定義し，$f(x) > 0$ ならば $b_2 = x, a_2 = a_1$ と定義する．このようにしてゆくと $0 < b_{n+1} - a_{n+1} = 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$ はどんどん小さくなってゆき，同時に区間 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ には必ず根が存在することになる．10 回ほど繰り返すと 3 桁ほどの精度が期待できることになる．

二分法はあくまで近似値を得る方法であり，解析学の基礎とは関係のない話題のようにも見える．しかし，この方法を中間値の定理の証明に使えることを示したのがコーシーのすごいところである ([150, 429])．最近の微積分学の教科書では，たとえば藤田 [51] などボルツァーノ流に中間値の定理を証明しているものばかりで

あり，コーシー流に証明しているものは見つけられなかった[40]．19世紀初頭の数学者にとってラグランジュの教科書は必須の勉強アイテムであったから，コーシーがラグランジュを読まなかったはずがない．しかしコーシーはラグランジュのアイデアを拝借したことを書いていない．よほど性格が悪かったのであろうか．オイラーやラグランジュはアイデアのもとになる論文は常に引用していたようである．

ここで，級数の収束についてもコメントしておこう．コーシー以前には級数の収束が問題にされなかったわけではない．むしろ，オイラーを含む大多数の数学者は級数の収束を頭に入れていた．オイラーが収束を無視していたわけではないが，かといって深刻に考えたわけでも（若い頃は特に）ないようだ．また，ガウスが超幾何級数の収束を綿密に吟味したのは1812年のことであり（[420]），コーシーやボルツァーノよりも先んじている．しかし，これはべき級数のみの話であり，一般の級数を論じたものではない．また，公表されたものでもない．

このように級数の収束は18世紀でも部分的に問題とされていたのであるが，一般の級数の収束が厳密に定義され，議論の全面に押し出されるのはコーシー以降であり，この意味でコーシーの貢献はきわめて大きい．

最後に，ベルオスト[80]はコーシーの伝記で，数学史に興味のある人ならば一読の価値がある．ベル[81][41]の第15章もコーシーの短い伝記である．コーシーの業績の中の白眉は複素関数論であろう．複素関数論については本書で述べることはできないので，付録Aや[239]をご覧になっていただきたい．

5.5 アーベルの貢献

定理5.2が正しくないことに最初に気づいたのはアーベル[42]であると言われている（[277], 1826年）．彼がこの間違いに気づいたのはフーリエ級数

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\pi}-\left[\frac{x}{\pi}\right]\right)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots \qquad (-\infty<x<\infty)$$

による．フーリエ級数の各項は連続関数であり，すべてのxで収束するが，左辺は$x=\pm\pi$で不連続になることが[277]の316ページに脚注として現れている．この論文でアーベルが示した次の定理はべき級数に関する最も基本的な定理である．

---

40 『スミルノフの高等数学教程』はさらに別の証明を用いている．連続関数が有界閉区間で最大値をとることに帰着させるものである．

41 これは世界中で読まれてきた本であり，面白い本であることは認めざるを得ないが，著者の勝手な思いこみの多い本でもあるので，読むときには事実関係について注意して読まねばならない．たとえばカントールをユダヤ人であるとしているところなど，事実誤認も多い．

42 Niels Henrik Abel (1802-1829).

定理 5.6（[277]，ただし現代的に意訳してある）　$\delta > 0$ とする．もしも級数

$$f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$$

が $\alpha = \delta$ で収束するならば，すべての $\alpha \in [0, \delta]$ について収束し，$f(x)$ は $[0, \delta]$ で連続となる．

この定理を証明する際に，今でも使われるアーベルの補助定理が必要となる．

さて，アーベルは一様収束の概念を事実上知っていたと見なしてよいのであろうか？ 確かにこの定理の証明の肝心なところである量が α に無関係に小さくなることを使う場面があり，これは一様収束と実質的に同じであると見なすことも可能かもしれない．このことを理解するために [277] における彼の証明を振り返ってみよう．級数は $\alpha = \delta$ で収束するから，$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n_0}^{n_0+m} v_k\delta^k < \epsilon$$

とできる．このとき，任意の $\alpha \in [0, \delta]$ に対して，

$$\sum_{k=n_0}^{n_0+m} v_k\alpha^k = \sum_{k=n_0}^{n_0+m} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k v_k\delta^k$$

を評価する．$w_m = \sum_{k=n_0}^{n_0+m} v_k\delta^k$ とおくと（ただし $w_{-1} = 0$ と定義する），

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n_0+m} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k v_k\delta^k &= \sum_{k=n_0}^{n_0+m} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k (w_{k-n_0} - w_{k-1-n_0}) \\ &= w_0\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0} - \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+1}\right] + w_1\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+1} - \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+2}\right] \\ &\quad + \cdots + w_m\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+m}.\end{aligned}$$

ゆえに，これは上から

$$\begin{aligned}&|w_0|\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0} - \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+1}\right] + |w_1|\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+1} - \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+2}\right] \\ &+ \cdots + |w_m|\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0+m} \le \epsilon\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n_0} \le \epsilon\end{aligned}$$

で押さえられる（ここで $0 \le \alpha/\delta \le 1$ であるから [ ] の中身が正であることを用いている）．この（我々が現在やる証明とほとんど同じ）証明で，アーベルは $f(\alpha)$ が収束することを示し，さらに，

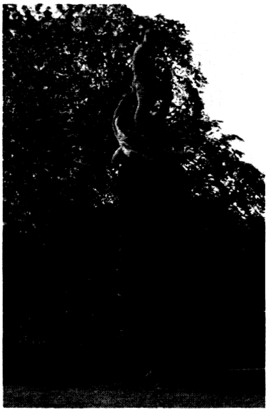


図 5.5 ノルウェイのオスロ市にあるアーベルモニュメント．モニュメントの足下にある花輪は 2009 年のアーベル賞受賞者であるグロモフ氏が献花したもの（2009 年岡本久撮影）．

$$\varphi(\alpha) = \sum_{k=0}^{n_0} v_k \alpha^k$$

とおき，$f(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$ で ψ を定義する．すると，上で示した不等式によって，$\psi(\alpha)$ は α の如何にかかわらず，ϵ で押さえられる．

$$f(\alpha - \beta) - f(\alpha) = \varphi(\alpha - \beta) - \varphi(\alpha) + z, \qquad (|z| \leq 2\epsilon)$$

であり，φ は連続であるから，f も $0 \leq \alpha \leq \delta$ で連続である，というふうに結論付ける．これには実質上一様収束が使われているといっても言い過ぎではなかろうというのがハーディー [452] などの人々の主張であろう．

しかし，アーベルの論文をさらに読み進めてみると事情はこれほど単純でないように思える．彼の定理 V は

定理 5.7（[277] の Théorèm V） もしも $v_0, v_1, v_2, \cdots$ が $a \leq x \leq b$ で定義された連続関数で級数

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \cdots$$

が収束するならば，

$$f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots$$

は $0 \leq \alpha < \delta$ のとき収束し，x の連続関数となる．

というものであるが，これはこのままでは正しくない（章末問題を見よ）．ボルツ

ァーノやコーシーと同じ間違いを犯している．したがって，彼には一様収束ということの本質がわかっていなかったと結論せざるを得ない．百歩譲ってこれは彼の勇み足であったとしても，定理 5.6 において彼はべき級数しか扱っていないのであり，一般の関数列を考えているわけではないから，彼が一様収束を理解していたと主張するのは無理であろう．

アーベルは論文の後半で，論文のタイトルにも現れている二項定理

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

の収束・発散を，複素変数 x について吟味している．この部分は完璧である．コーシーも同じ問題を扱っているが不完全である．

5.6　その他

各点における連続性と一様連続とを区別することは大切であるが，これはいつ頃現れた概念であろうか．

定義 5.1　$\mathbb{R}$ の部分集合 S で定義された実数値関数 f が次の条件を満たしているとき，f は S において一様連続であるという：任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ となるすべての $x, y \in S$ について $|f(x) - f(x)| < \epsilon$.

各点連続では δ は x に依存してもかまわないが，一様連続では δ は x や y に無関係にとれることが要求されている．

一様連続の概念にたどり着いた最初の人物はハイネ[43]で，1872 年のことであると言われている[44]．[462] の 188 ページにはおなじみの定理

定理 5.8　f が $a \le x \le b$ の各点で連続ならば f は $[a, b]$ で一様連続である．

が明白に述べられて，現代的な証明が与えられている．このハイネの論文では 1 点における連続性を定義（[462] の 182 ページ）して，すべての点で連続な時に連続関数と呼ぶ，という現代的な定義が現れており，歴史的に重要である．ただこうしたアイデアは彼がワイエルシュトラスの講義を聴いて，そこからまとめあげたものであるので，ハイネのオリジナルというわけではい．実際，1870 年に発行され

43　Heinrich Eduard Heine (1821-1881)．いわゆるハイネ－ボレルの定理で有名である．[202] も参照．

44　[462] の 184 ページに一様連続の定義が現代的な形で現れている．

たハンケルの小冊子 [447] にも1点での連続性がはっきりと述べられている. [42] は ϵ-δ 論法の歴史を綴ったユニークな書物である. お読みになれば得るところが大きいであろう.

19世紀に解析学の厳密化が進んだのはなぜか? グラビナー [431] によれば, フランス革命以前は, 数学者は王立のアカデミーに属し, 研究に専念すればよかったのであるが, フランス革命以後は大学で教えなくてはならなくなった. 学生に教えるにあたり, 基礎を見直す必要に迫られ, 概念の整備が進んだ, というわけである. [107, 108, 186] はすべて理工科大学の教科書であることがそれを物語っているという. コーシーやラグランジュの日記や手紙のようなものの中に「教育が厳密化を推進した」ということがわかるものがあればいいのだけれどもそれはないようなので, これはあくまで推測のようである. ただし, デデキント[45]は1872年の『連続性と無理数』[38] の序文の中で, スイスの連邦工科大学で初めて教えることになったとき, 当時の実数の定義がいかに不備であるかを悟ったと告白しているから, 教育の義務が厳密化を推進したという説はあながち間違ってはいないものと思う.

ボルツァーノ・コーシー・アーベル以降, 曖昧な概念は一挙にすべて排除されたのであろうか? そうではないらしい. たとえばクライン [177] も指摘しているように, 1833年刊のポアソンの教科書 [219] では無限小は単に便宜的なものなのではなくはっきりと存在している量であると書いてある (12節). ベルトラン[46]はポアンカレが [218] の24ページにおいて賞賛している数学者であるが, 彼の教科書 [89] の一番最初は無限小の定義である:

> 無限小あるいは無限小量とは, 無制限にいくらでも小さくなってゆき, 決して到達することなく, 任意に望むだけゼロに近づくような変化量のことである.

これはコーシーのものと言うよりは100年くらい前のダランベールの概念に近いものであろう. これが1864年に出版されているのだから驚かざるを得ない. さらに彼は任意の関数が例外点を除いて微分可能であることをアンペール流に証明しようとし, 成功した気になっている[47]. 他にも [134] でデュアメル[48]がやはり任意関数の微分可能性を「証明」している (第1巻21,22ページ). ベルトランもデュアメルも著名な数学者でありコーシーよりも後の世代である. 微分方程式にはデュア

45 Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916).
46 Joseph Bertrand (1822-1900).
47 アンペールについては第II部第8章を見よ.
48 Jean Marie Constant Duhamel (1797-1872).

メルの原理（方法）というものもあるくらいで，創造力もあった数学者である．当然コーシーのやったことも知っていたはずであるが，微分可能性は仮定するものではなく証明できるものだと思い込んでいる．

デュアメルの「証明」は次のような背理法の論法である．彼は，関数 $y = y(x)$ が与えられているとき，例外点を除いて $\Delta y/\Delta x$ がゼロでない有限の値に収束すると主張する[49]．これを背理法で証明するために，$\Delta x \to 0$ のときに $\Delta y/\Delta x$ が有限な（ゼロでない）極限値に収束しないと仮定せよ．このとき，$\Delta y/\Delta x$ はゼロに収束するかあるいは無制限に増大しなくてはならない[50]．このようなことが x の特別な値でしか発生しないのならばそれはすなわち証明すべきことであった．そこで，ある小区間にわたってゼロに近づくかあるいはそこで常に無限に大きくなると仮定せざるを得ない．というのは，その両者が入れ代わり立ち代わり起きるということは意味をなさないからである．そこである小区間全体で $\Delta y/\Delta x \to 0$ となる場合だけ考えればよい．なぜならば $|\Delta y/\Delta x| \to \infty$ ならば $\Delta y/\Delta x$ の代わりに $\Delta x/\Delta y$ を考えればよいからである．さて，そこからデュアメルは y がその小区間で定数であることを導く．そして，「y は定数であるから x の関数ではない」と宣言して証明を終えるのである．

ここまでお読みいただいた読者はきっと驚いておられるであろう．歴史に名前が残るような数学者の書いたものとは思えないからである．現代ならばどこの大学院を受験しても不合格であろう．しかし，厳密性も時代とともに変わりうるものなのである ([429])．

デュアメル [134] では連続性の定義も退化している．ここでは中間値の定理が成り立つ関数を連続と呼び，ボルツァーノ－コーシーの意味の連続性が成り立つことが彼の連続性が成り立つことの十分条件であると述べている（[134] の 5 ページ）．間違いではないが，連続性の重要性を理解していないことを暴露している．

したがって，コーシーの理論は徐々に浸透していったというのが正しい言い方であろう．一方，いったんこうした考え方が浸透すると発散級数を一切排除するという極端な潔癖主義が主流となったようである．ハーディー [159] の 8 ページによれば，その後 1880 年にフロベニウス [415] が発散級数を扱うまで発散級数について考えようとする数学者が一切出なかった．これは解析学にとってきわめて不幸なことであった．アーベルは「発散級数は悪魔が作ったものだ」と言ったけれども，同時に「どうしてこんなものが正しい結果を導くのか，まことに不思議である．これ

49 現代人は，ゼロに収束するのもゼロでない量に収束するのも区別はつけないが，アンペールやデュアメルにとってその区別はなぜか重要であった．

50 このあたりはアンペールの論法とほぼ同じである．振動するという可能性は考えていない．

は大変面白い問題である.」とも述べている[51]わけであるから，発散級数を研究対象にすらしていなかったというわけではないのである．教条的な原理主義の害は数学にも及ぶようである．

[結局，微積分学の厳密化とは何だったのか]

こうして微積分学の歴史をふり返ってみると，様々な紆余曲折があったことがわかる．まず最初に微積分が生まれたときには無限小はある意味で必要なものであった．極限概念の使用を主張したニュートンですら，最初は無限小を使っていたのである．それではダメだと言うことになってこれを幾何学で裏打ちしようとしたのが，イギリスの数学者たちであった．幾何学ではダメだから代数学で理論化しようとしたのがラグランジュであった．そして，どちらも不十分であり，いわゆる $\epsilon-\delta$ 論法で微積分学を構築したのがコーシーである．では，コーシーの理論には無限は無いのかといえば，そうではない．結局，微積分学に無限は絶対に必要なものなのである．コーシーの理論はグラビナーによって「不等式の代数学」と呼ばれており（[150]），これはよく核心をついた言葉である．しかし，コーシーの理論では無限に多くの不等式が必要であることを忘れてはならない．任意の自然数 n に対してある $\delta=\delta(n)$ が存在して

$$|f(x+y)-f(x)|<\frac{1}{n} \qquad (|y|<\delta)$$

が成り立つというときに，すべての n についてこうした不等式が瞬時に用意できなければならないのである．そして，そしてそうした無限個の不等式（あるいは無限に多くの δ）を提出できる，あるいはそれらを想定することができる，と仮定しなければこうした理論は意味がない．つまり，無限の操作を一瞬でできる能力が人間の脳にはあるということを認めているわけである．

なんらかの無限が必要であったと認識するならば，無限小にこだわったヨハン・ベルヌーイやオイラーは決して愚かなことをしていたわけではないという気になってくる．むしろラグランジュのやったことの方が滑稽に思えてくるのである．

---

51 Abel 全集第2巻257ページ．

年表

1667	グレゴリーが解析的表示を研究対象にする（関数の始まりか？）
1692	ライプニッツが functio という言葉を使う
1718	ヨハン・ベルヌーイの関数の定義
1747	振動弦論争の発端
1748	オイラーの無限解析序説が出版される
1753	ダニエル・ベルヌーイが任意関数を三角級数で表されることを主張する
1755	オイラーの微分学教程が出版される
1797	ラグランジュの解析関数の理論が出版される
1806	アンペールの論文出版される
1806	アルガンが複素数を平面の点と同一視する理論を発表
1807	フーリエが任意関数を三角級数で表されることを主張する
1817	ボルツァーノの *Rein Analytischer* ··· 出版される
1821	コーシーの *Cour d'Analyse* 出版される
1822	フーリエの熱の解析的理論が出版される
1823	コーシーの微分積分学要論が出版される
1829	ディリクレの *Sur la convergence* ··· 出版される
1832 ?	ボルツァーノの至るところで単調でない関数（出版されず）
1837	ハミルトンが複素数 $a+\sqrt{-1}b$ を実数のペア (a,b) で表す理論を発表
1841	ワイエルシュトラスが一様収束という用語を用いる（公表はされず）
1847	ストークスが準一様収束の概念（？）に到達
1848	ザイデルが準一様収束の概念（？）に到達
1853	コーシーが現代的な一様収束の概念に到達
1872	デデキントの *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* 出版される
1872	ハイネが一様連続の概念を使う
1875	ワイエルシュトラスの「連続だが至る所微分不可能な関数」発表される
1889	ペアノが自然数の公理系発表

＊　＊　＊

演習問題

[問題 1] ✿ 次の条件を満たす関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を例示せよ：$\forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ に対して $f(\xi,y)$ は y の連続関数であり，$f(x,\eta)$ は x の連続関数であるが，f 自体はある点 (x_0,y_0) で 2 変数関数として連続ではない．

[問題 2] ✿ f が $[a,b]$ で連続であると仮定して，補題 5.1 を証明せよ（f' については，存在すること以外に，連続性はおろか何も仮定していないことに注意せよ）．

[問題 3] ✿✿ 実数の連続性は仮定し，中間値の定理を証明せよ．3 種類の異なる証明を考えよ．

[問題 4] ✿✿ (5.1) のように，ある一点の近傍で一様収束しない関数列はよく知られている．では，ある区間の各点で収束するが，どの小区間でも一様収束しない例を作れ．

[問題 5] ✿✿ 定理 5.4 を証明せよ．

[問題 6] ✿ ディーニの定理 5.5 を証明せよ.

[問題 7] ✿ 連続性が威力を発揮する問題として関数方程式 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ がある．次の定理を証明せよ．f は $\mathbb{R}$ で定義された連続関数であり，すべての実数 x, y について $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が満たされているものと仮定する．このとき，$f(x) = f(1)x$ となることを示せ（これは通常，コーシーの結果であると言われている．[107] の 5 章）．連続性に対する仮定を落としてしまうと一次関数でない解が存在することが知られている[52]．f が可測関数である仮定すると，$f(x) = f(1)x$ となる[53]．

[問題 8] ✿✿ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ が一様収束することと次の条件（一見するとずっと緩いものであるようにみえるが）は同値であることを証明せよ．
任意の $x \in [a,b]$ と任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとき，ある $\delta = \delta(x,\epsilon) > 0$ と $n = n(x,\epsilon)$ が存在して，$m > \ell \geq n(x,\epsilon)$ なる任意の m, ℓ と任意の $x - \delta < y < x + \delta$ に対して

$$\left| \sum_{k=\ell}^{m} u_n(y) \right| < \epsilon.$$

[問題 9] ✿ コーシー [107, 108] とボルツァーノ [315] には多くの類似点が見られる．グラッタンギネス [433] は，「コーシーはボルツァーノの小冊子を読み，それに基づいて彼の *Cours d'Analyse* を書いたけれどもボルツァーノの名前を引用しなかった」としている．このような剽窃は本当にあったのであろうか？ フロイデンタール [414] ははっきりとこれを否定しているし，多くの歴史家は [433] を信用していないようである．グラビナー [150] はコーシーを賞賛しており，ボルツァーノとコーシーの研究は独立であった可能性が高いとしている．読者はこれらをお読みになりご自身のご意見を持っていただきたい．

[問題 10] ✿✿ 定理 5.7 が成り立たないことを示せ．

[問題 11] ✿✿ マクローリンの *A Treatise of Fluxions*[201] は流率法の基礎付けには役立たなかったが，数学的な内容はきわめて高度であり，独創的な結果も多い．たとえばオイラー－マクローリン展開は数値計算の理論には必須であるが，ここで初めて発表されている．また，重力で引き合っている物質が自転しているとき，回転楕円体で解となるものがあることを証明したが，これは自由境界問題の厳密解としてはもっとも古いものであると言うことができる ([258])．同書に現れる三等分曲線を紹介しよう（第 1 巻の 316 節）．図 5.6 の左図のように，原点と結んだ線分が x 軸となす角度が，点 $(1,0)$ と結んだ線分が x 軸となす角度の 3 分の 1 となるような点の軌跡がこの曲線である．この曲線を所与のものとすると，任意の角 θ の 3 等分が，線分を引くだけで可能となる．この曲線が

$$(2x+1)y^2 = (3-2x)x^2$$

52 G. Hamel による [445].

53 Fréchet ([411], 1913 年), W. Sierpińsky ([594], 1920 年), S. Banach ([294], 1920 年).

で表されることを証明せよ．また，この曲線は

$$x = \frac{1}{2}(4\cos^2 t - 1), \quad y = \frac{1}{2}(4\cos^2 t - 1)\tan t, \qquad (-\pi/2 < t < \pi/2)$$

とパラメータ表示できることを示せ．最後に，$0 \leq x \leq 1.5$ の部分で囲まれる領域の面積が $3\sqrt{3}/4$ であることを証明せよ．

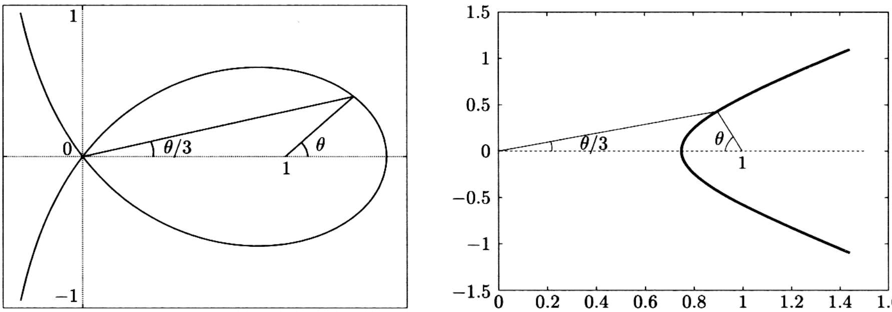


図 5.6　左：マクローリンの三等分曲線．右：別の三等分曲線．

[問題 12]　マクローリンの三等分曲線とは別に，図 5.6 の右図のように 3 等分を実行する曲線もある．これが

$$(4x-1)y^2 = (4x-3)x^2$$

と表されることを示せ（ただし，この曲線では 145 度以上の角を 3 等分することはできない）．また，この曲線は

$$x = \frac{1}{4}(2\cosh^2 t + 1), \quad y = \frac{1}{4}(2\cosh^2 t + 1)\tanh t, \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

とパラメータ表示できることを示せ．

[問題 13]　✿ *Ladies' Diary*（[192]，1742 年，問題 232）には次の問題がある：a を正定数とする．曲線 $x^3 + y^3 - axy = 0$ が第 1 象限において囲む領域（図 5.7）の面積が $a^2/6$ であることを証明せよ．この曲線は

$$x = \frac{av^2}{1+v^3}, \qquad y = \frac{av}{1+v^3} \qquad (0 < v < \infty)$$

とパラメータ表示できることを確かめよ．

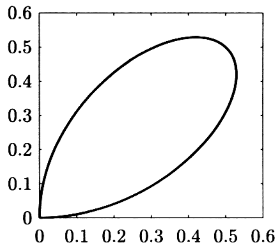


図 5.7　曲線 $x^3 + y^3 - axy = 0$ が第 1 象限において囲む領域．

[問題 14] ✿ アーベルの積分方程式 ([278]) とは

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}}\,\mathrm{d}y \qquad (0 < x)$$

のことである．ここで，φ が未知関数で，f が既知関数である．f が C^1 級であると仮定したとき，解は次式で与えられることを証明せよ．

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{x-y}}\,\mathrm{d}y.$$

[問題 15] ✿ コーシー－アダマールの定理とは，べき級数

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

において

$$A = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

とおくとき，$0 \leq |x| < 1/A$ ならば上のべき級数は収束し，$1/A < |x|$ ならば発散するというものである．これは [107] の 9 章第 2 節にあることを確かめよ．これは，しばらくして忘れられたものと見えて，アダマールによって再発見されている（[439]）ので，現在ではコーシー－アダマールの定理，あるいはコーシー－アダマールの判定法とよばれている．コーシーは上極限という言葉は使っていないが，その実態はほぼつかんでいることを確かめよ．

[問題 16] ✿ ボール（[74] の 387 ページ）によれば，「関数 ϕ が $a \leq x < \infty$ で単調減少ならば級数 $\{\phi(a+n)\}_{n=0}^{\infty}$ の収束は積分 $\int_a^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ の収束と同値である」という定理はオイラーによって 1736 年に発見され，マクローリンによって 1742 年に再発見されているという．これは，オイラーの [376] のことと思われる．ボールの主張は正しいかどうか確かめよ．

[問題 17] ✿ 自然数 n と $0 \leq x \leq 1$ に対して

$$v_n(x) = \frac{x}{(nx+1)((n+1)x+1)} = \frac{1}{nx+1} - \frac{1}{(n+1)x+1}$$

とおく．このとき，次式を確かめよ．これはストークス [601] による．

$$\lim_{x\downarrow 0}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\downarrow 0} v_n(x)$$

[問題 18] ディリクレの関数は解析的表示ができないように見えるが，そうではない．次の表示式はペアノが与えた（[215]，1884 年）．これを確認せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\downarrow 0}\frac{(\sin n!\pi x)^2}{(\sin n!\pi x)^2 + t^2} = \begin{cases} 1 & (x \notin \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Q}) \end{cases}$$

第6章　フーリエ級数——解析学の新展開

関数を表現する方法としてテイラー展開（べき級数展開）は最も古いものである．ニュートンが成功を収めたのはべき級数展開を駆使する方法を見いだしたからである．実際，微積分学の基本定理はそれだけでは応用に無力である．テイラー展開はしばしば劇的な成功を収めてきたが，問題がないわけではない．テイラー展開できる関数はいわゆる解析関数に限られ，一般の連続関数を級数表示できるわけではないからである．しかし，フーリエ[1]によって提唱されたフーリエ級数を用いればたいていの関数は級数表示が可能となる．フーリエ級数は解析学における強力な武器であり，歴史も長いから多くの解説を読むことができる．しかしながら多くの解説には相互に矛盾も見られる．著者の考えにも間違いがあるかもしれないので読者はその覚悟で以下を読んで欲しい．

6.1　フーリエ級数とは

フーリエ級数とは次のようなものである．$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ を与えられた関数とする．このとき

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (-\pi \leq x \leq \pi). \tag{6.1}$$

が成り立つ．ここで，a_n, b_n はすべて実数の定数であり，現在ではフーリエ係数と呼ばれている．フーリエはこの係数が

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{6.2}$$

で与えられることを発見した．

注意 6.1　単に (6.1) の右辺の形の級数を考えるときにはこれを三角級数（trigonometric series）と呼び，その中でも特に係数が (6.2) で与えられるものをフーリエ級数と呼ぶことが多いようである．

1　Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830)．[154] にはフーリエの伝記がある．もう少し短い記事は [569]．

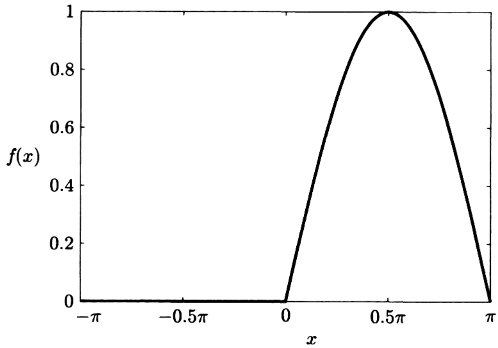


図 6.1 関数 (6.3) のグラフ.

たとえば,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases} \tag{6.3}$$

といった区分的に解析的な関数（図 6.1）は，部分区間 $-\pi \leq x \leq 0$ あるいは $0 \leq x \leq \pi$ ではテイラー展開できるが，$-\pi \leq x \leq \pi$ 全体ではテイラー級数では書けない．しかし，このような関数でもフーリエ級数を使えば $-\pi \leq x \leq \pi$ 全体で成り立つ表示が可能となる[2]:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2-1}\cos 2nx \qquad (-\pi \leq x \leq \pi). \tag{6.4}$$

これはフーリエ級数の最大の利点である．$n = 10$ まで和をとると比較的よく収束していることがわかるであろう（図 6.2）.

フーリエのアイデアはきわめて重要なものであることがその後の研究でだんだんとわかってきた．誤解を恐れずにあえて極言すれば，実変数関数の理論はオイラーに始まり，ラグランジュがいったん完成させ，フーリエから新たな発展が始まったと言うことができる．

フーリエ級数には上のもの以外に，フーリエ正弦級数と呼ばれるものとフーリエ余弦級数と呼ばれるものがある．これらは $0 \leq x \leq \pi$ で定義された関数の表示法である．関数 $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ が与えられたときに，これを奇関数として $[-\pi, \pi]$ に拡張し，上のフーリエ展開をしたものがフーリエ正弦級数である．具体的には，

2 この例はガウス [421] にあるものであるが，ここで彼はこの関数を不連続と呼んでいる．まだオイラー流の定義が生きている証拠である．これが何年に書かれたのかははっきりしない．1847 年とも考えられるが，もっと古いかもしれない．

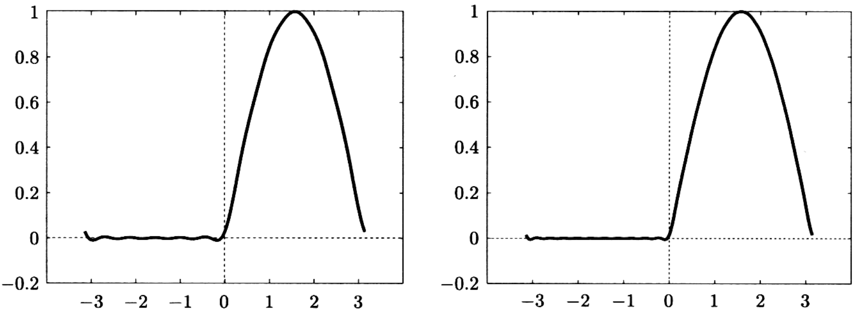


図 6.2 左：(6.4) の級数を $n = 5$ まで和をとった関数．右：$n = 10$ まで和をとった関数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (0 \leq x \leq \pi), \tag{6.5}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{6.6}$$

が成り立つ．一方，f を偶関数として拡張してフーリエ展開したものがフーリエ余弦級数である．

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (0 \leq x \leq \pi), \tag{6.7}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{6.8}$$

同じ関数でもフーリエ余弦級数とフーリエ正弦級数は違うものである．また，$[-\pi, \pi]$ で定義されたある関数のフーリエ級数と，その関数を $[0, \pi]$ で考えてフーリエ正弦級数（あるいはフーリエ余弦級数）に展開したものとは一致する必要はない．たとえば (6.4) を $[0, \pi]$ で考えればそのフーリエ正弦級数は $\sin x$ である．

6.2 フーリエ級数の由来

フーリエ級数の歴史を簡単に振り返っておこう．1753 年，ダニエル・ベルヌーイは弦の振動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < t;\ 0 \leq x \leq L) \tag{6.9}$$

を考察し（[105],[199],[247] の 351–368 ページ），その一般解が，a_j と b_j を定数として

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.10}$$

で与えられると主張した．(6.10) が (6.9) を満たすことを示すことは（少なくとも形式的には）易しい．項別微分すればいいだけの話である．しかし，問題はその逆命題が正しいかどうかである．すなわち，(6.9) の「任意の」解が (6.10) で与えられるかどうか，という点は易しくはない．彼の主張は結果として正しい主張だったのであるが，オイラーやダランベールから直ちに反撃にあい，疑いの目で見られることになった（第I部第2章）．オイラーが間違った結論に達したのは，ある意味で理解できないこともない．なぜならば，フーリエ級数で表される関数は実数の組 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で特徴付けられるわけであるから，（現代的な意味の）連続関数全体の集合よりも圧倒的に小さく思えるのは仕方のないことである．しかし，21世紀の後知恵で言えば，集合論的にはすべての連続関数の集合の濃度は連続の濃度に等しく，フーリエ級数全体の濃度と等しいのである．結論として，オイラーの感覚は sin や cos の有限和については正しいが，無限和については正しくなかったのである．しかし，それが理解されるのはずっと後のことである．いずれにせよ，18世紀後半では「任意の関数を (6.10) の形で表すことはできない」と思われていたらしい．振動弦の方程式についてより詳しいことを知りたければ [105, 153, 199] あるいは [96] を見よ．また振動弦の論争の一部が [247, 610] に英訳されている．

時代は下って，1807年，フーリエが一般の関数を sin と cos で表すことができると主張した．フーリエは熱の数学的な理論の創始者である．彼の時代には熱の物理的な意味は不明であった[3]けれども，彼は現象論的な理論を数学的な形で述べることに成功した．現在の言葉で言えば，熱の数学的なモデルの提唱者であった．彼はその理論を展開し，物質内部の温度 $T=T(t,x,y,z)$（t は時間，(x,y,z) は物質内部の点を表す空間変数である）が次の偏微分方程式に従うことを導いた：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{6.11}$$

これは現在では熱方程式と呼ばれている（拡散方程式と呼ばれることも多い）．κ は熱伝導率と呼ばれる正定数で，物質に固有のものである．フーリエはこの偏微分方程式の解の性質を探る中で，フーリエ級数と呼ばれるようになった関数の表示を導いたのである ([145])．

3　実際，彼の時代には，熱は熱素という元素の流入・流出として説明されることが多く，熱の本質はエネルギーであるという考え方が出てくるのはずっと後である．

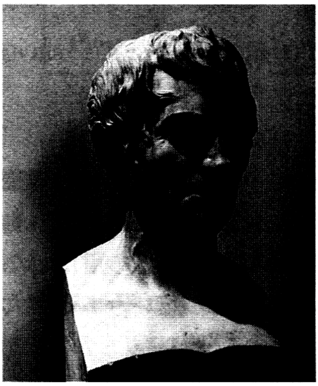


図 **6.3** Musée de l'Ancien Évêché（グルノーブル）にあるフーリエの胸像（2012 年鈴木咲衣氏撮影）.

注意 6.2 フーリエの 1807 年の論文は結局印刷されず，彼の著書 [145] が 1822 年に公表されてからしばらくして原稿も（アカデミーの中に存在していたのではあるが）紛失の憂き目にあった．しかし，これが 150 年もたってから発見され，[154] に公表されることになった．ただし，1807 年の論文と 1822 年の著書は大きくは異なっていないようである．

フーリエの目的のひとつは熱方程式 (6.11) の境界値問題を解くことであった．たとえば，(6.11) を $0 < t$, $0 \leq x \leq \pi$ で満たし，境界条件 $T(t,0) = T(t,\pi) = 0$ を満たし，初期条件 $T(0,x) = \phi(x)$（時刻 $t = 0$ での温度分布が既知であるとする）を満たす T を求めることを考えてみよう．このとき，$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ とフーリエ余弦展開できる．このとき $T(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin nx$ という形の解を探すのは自然であろう．これを熱方程式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\mathrm{d}B_n}{\mathrm{d}t}(t) + \kappa n^2 B_n(t) \right\} \sin nx. \end{aligned}$$

したがって，すべての n に対して

$$\frac{\mathrm{d}B_n}{\mathrm{d}t}(t) + n^2 B_n(t) = 0$$

であればよい．つまり，偏微分方程式が無限個の常微分方程式に帰着されたのである．初期条件 $B_n(0) = b_n$ のもとでこの常微分方程式は簡単に解ける：$B_n(t) = b_n e^{-\kappa n^2 t}$．これで熱方程式の解が

$$T(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa n^2 t}\sin nx$$

と解析的に表示ができることになった.

1807年に発表した論文でフーリエは「任意の1変数関数 $f(x)$ はこうした級数(6.1)(6.2)で表示できる」と主張した.しかし,彼は厳密な証明をしたわけではなく,ラグランジュやポアソンは彼の主張を信用しなかった.ベルヌーイの主張とフーリエの主張は似ているが大きな違いもある.大きな違いは,ベルヌーイが(6.10)の係数を決める方法を示すことができなかったのに対し,フーリエは係数が(6.2)で決定されるということを示したことである.この違いは大変大きい[4].

クライン([179]の458ページ)によれば,(6.2)の係数決定法はすでに1759年にクレロー(Clairaut)が,見つけているということである.[321]の70ページや[425]が指摘しているように,オイラーも(6.2)を見つけている.これは[387]のことで,この論文はオイラーが1777年に提出し,その死後1798年に出版されている.ただし,クレローもオイラーも関数がcos展開できることを仮定しているから任意の関数を展開するという考えはない,というのが定説である.しかし,よく読んでみると必ずしもそうとも言い切れないところがオイラーにはある([321]の70-71ページ):オイラーは関数 $f(x)$ に対して $\xi=\cos x$ とおいて f を ξ の関数と見なす.すると,当時の常識にしたがって,$f(\xi)$ を ξ のべき級数に展開する.これが可能であることは1777年の時点では疑われなかった.これは

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1\cos x+\alpha_2\cos^2 x+\alpha_3\cos^3 x+\cdots$$

を意味する.一方で,$\cos^n x$ は $\cos nx, \cos(n-2)x, \cos(n-4)x, \cdots$ の線形結合で書ける.それを代入して並べ替えたら,

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots \tag{6.12}$$

という形になる.すなわちフーリエ余弦級数である.オイラーはすべての関数がこういうふうに表示できるとは主張していないけれども,これを読むとフーリエのように「展開できる」と勇敢に主張する人が出てきてもおかしくはなかろう.このあとオイラーは,いささか迂遠な方法で係数 a_n を導く.そしてそれを確かめるかのように,(6.12)に $\cos nx$ をかけて項別積分すれば a_n が積分で決まること,すなわち(6.8)を確かめている.この論文の時点でかなりフーリエに近いところまで到

4 ただ,フーリエの(6.2)の導き方は恐ろしく迂遠である.



図 6.4

達しているというのは言い過ぎであろうか？ オイラーには定義域という概念がなく，すべての（非周期）関数が周期関数で表現できるというのはばかげたことのように思われたのであろう．しかし，独立変数をある区間でのみ考え，他の区間では一切関知しない，と考えることができるようになればこのオイラーの論文からフーリエの理論までそう遠くはない．オイラー，ベルヌーイ，ラグランジュらは関数の定義域をきちんと認識していなかった（ある区間全体で成り立つ性質はその区間の外側でも成り立つと思いこんでいた）のに対して，フーリエは級数 (6.1) が収束する区間を明白に認識していたということはきわめて大きい．フーリエは 1798 年から 1801 年までナポレオンのエジプト遠征に参加し，その後はグルノーブルの県知事に任命されて官僚として働いていたわけであるので，オイラーの 1798 年の論文は読んでいなかったであろう．知っていたらもう少し書き方が違っていたはずであるからである．

このようにフーリエの考え方はきわめて現代的なものであったが，今の我々からすると首をかしげるところもある．たとえば [145] の 178 節には次のように書いてある．

> 方程式
>
> $$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \&c \qquad (6.13)$$
>
> は，x を横座標 y を縦座標として，いくつかの線分からなる線に属する．その線分は座標軸に平行で，長さは円周率の半分[5]に等しい．これら平行な線分は交互に横軸の上下に置かれており，距離は $\pi/4$ で，それ自身が線の一部をなしているような縦の線分でつながれている．

すなわち，現代人ならば図 6.4 右のように理解するのを図 6.4 左のように理解しているようである．平面曲線と関数との区別がついていなかったのかもしれないが，単なる勘違いかもしれない．

関数の定義域を認識しないと実に滑稽な間違いが発生することがある．これが

5 訳注：直径 1 の円周の長さの半分，つまり $\pi/2$ である．

1837年のケランド[172]の著書に現れているので，トムソン[6][608]にしたがって，これにも触れておこう．ケランドは[172]の64ページにおいて，フーリエの導いた展開式はほとんどすべてが間違いであると断言している．これは彼の勘違いであるが，なぜそのような勘違いが起きたのであろうか．彼の本[172]の68節にある次の問題を考えてみよう．関数$\phi(x)$を，$0 < x < \alpha$で定数cをとり，$\alpha < x < 2\pi$でゼロとなる関数とする．このときフーリエ展開は

$$\phi(x) = \frac{c\alpha}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{\sin n\alpha}{\pi n}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{1-\cos n\alpha}{\pi n}\sin nx \tag{6.14}$$

となる．これを計算したあと，彼は，「しかるにフーリエは後半の部分しか出していない」とフーリエを批判する．つまり，フーリエは

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{1-\cos n\alpha}{\pi n}\sin nx$$

と書いているからフーリエは間違っている，というわけである．しかし，フーリエは間違っていない．フーリエは$0 < x < \pi$で定義され，$0 < x < \alpha$で定数cをとり，$\alpha < x < \pi$でゼロとなる関数をフーリエ正弦展開してこれを得たのである．$0 < x < 2\pi$での関数を$\sin, \cos$で展開するのか，$0 < x < \pi$で定義された関数を正弦展開あるいは余弦展開するのか，何をやっているのかわからずに勝手にフーリエは間違っていると勘違いしたのであろう．関数は表示式という立場にとらわれるとどこでどう展開しようと同じ式が出てくるというふうに思ったのかもしれない．

注意 6.3 フーリエ級数の歴史についてはブルクハルトのサーベイ[321]が有名であるが，あまりに長大であるので著者らはほんの一部しか読んでいない．勇気ある読者はこれを読んでいただきたい．

フーリエは任意の関数という言葉を使っているが，これでどういった対象をイメージしていたのであろうか？ 著者らにはよくわからないが，オイラー流の区分的な解析関数である，というふうな解釈が支配的である([96, 541, 542, 606])．フーリエは[145]の418節で，

> かくして，関数あるいは関数の一部であって三角関数で表現できないものは存在しないのである．

6 William Thomson (1824-1907). いわゆるケルヴィン卿である．

関数の一部とはある有界区間でのみ定義された「関数」であると解釈するのが妥当であろう．この点でも「関数＝表示式」という観念が生きていることがわかる．

任意の関数がフーリエ級数で表されるという命題に対する彼の「証明」は厳密な意味では証明ではなかったけれども，彼の主張は基本的には正しく，その後の解析学をそれ以前のものとは決定的に異なるものにした．実際，偏微分方程式論，超関数論，調和解析，関数解析，こういった分野のどれをとってみてもフーリエ級数論のお世話にならないものはない．

さて，いったん (6.1) という形に展開できるということが証明されたら，その係数は (6.2) になる，ということは比較的簡単に見当がつく（項別積分すればよい．しかしこれも厳密に言えば問題は大いにある．付録 **D.4** を参照）．けれども，もっと問題なのは (6.1) という展開が可能であるかどうか，という点である．フーリエは様々な具体例で正しさを確かめたけれども，「どんな関数でも展開できる」ということを証明できたわけではなく，ラグランジュやラプラスは展開できるという結果自体を信用しなかった[7]．彼の理論は，狭い範囲の関数のクラスだけにしか適用できない理論であると見なされたのである（特にラグランジュが彼の理論に反対したためにフーリエの論文はいつまでも出版されることがなかったという）．そこで彼は論文を著書の形で出版することにし，15 年遅れで彼の結果は日の目を見ることになる ([145])．彼の著書 [145] はいろいろな意味で現代的である．関数を定義域付きで考えているし，不連続関数も差別せずに用いている（[145] の 348 節）．ただ，彼は $e^{-|x|}$ を不連続関数と称しているところ（[145] の 350 節）など，まだまだ，18 世紀の名残を残している（コーシー [107, 108] まではオイラー流の連続性の定義が普通であった）．

彼の理論は当初こそいじめられたのであるが，1820 年代以降の数学者はフーリエの主張を信用するようになり，展開可能性を証明しようという努力が開始されることになる．いつの時代でもたいていそうであるが，新しい世代は偏見を持たずにことを運ぶ能力に長けているのである．コーシー [337] やポアソン [563] はフーリエ級数の収束を証明できたと思っていたようである．が，彼らの証明は正しくはなかった．

ポアソン [563] がどう勘違いしたのかを説明することは簡単である．実際，形式的にフーリエ級数の収束を示すことはそう難しいことではない．これを見るために，(6.1) と (6.2) から，(6.1) の右辺を次のように変形する．

---

7 ポアソンやビオも批判的であったが，これには個人的な反目もあろう．明白な誤謬を指摘されたわけでもないのにこれだけ反対されたというのは，フーリエの理論に時代を超越した先見性があったということの証拠でもある．

$$
\begin{aligned}
(6.1)\text{ の右辺} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(n(x-y))\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{d}y + \lim_{r\to 1}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)r^n\cos(n(x-y))\mathrm{d}y \\
&= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n(x-y))\right)\mathrm{d}y \\
&= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{1-re^{i(x-y)}} + \frac{re^{-i(x-y)}}{1-re^{-i(x-y)}}\right)\mathrm{d}y \\
&= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)f(y)}{1+r^2-2r\cos(x-y)}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

ポアソンは最後の極限が（f が連続で 2π 周期であるならば）$f(x)$ に等しくなることを知っていたので，これで 2π 周期の連続関数 f についてフーリエの主張が証明できたと思ったのである．もちろんこれは厳密ではない．2 番目の等号で $\lim_{r\to 1}$ と $\sum_{n=1}^{\infty}$ の順序交換を行っているが，これは証明抜きに成り立つことではないのである．

フーリエの本は定積分の記号を定着させたことでも歴史的な意義がある． 積分の記号 $\int$ はライプニッツが発明したものであることはよく知られているところである．しかし，定積分 $\int_a^b \cdots \mathrm{d}x$ はフーリエが最初に使ったものである ([104])．オイラーは [390] で，

$$
\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n}\left[\begin{array}{cc} \mathrm{a} & x=0 \\ \mathrm{ad} & x=\infty \end{array}\right] = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}
$$

と書いている．この左辺が

$$
\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x
$$

を意味するのであるから，フーリエの記号法ははるかに優れている．

フーリエは [145] の 231 節において，$\int_a^b$ を導入しており，これはその後コーシーが [108] で採用したこともあって定着することになった．ただし，[108] の第 21 講では次の 3 種類の記号を定積分の記号として並べ上げている．

$$
\int_{x_0}^{X} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int f(x)\mathrm{d}x\left[\begin{array}{c} x_0 \\ X \end{array}\right], \qquad \int f(x)\mathrm{d}x\left[\begin{array}{c} x=x_0 \\ x=X \end{array}\right]
$$

だから，この時点では一番左の記号が唯一確定したものではなかったようである．

＊　＊　＊

演習問題

[問題 1]　✿✿ (6.2) を使って

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \qquad (-\pi \le x \le \pi) \tag{6.15}$$

を証明せよ．これを使って次式を証明せよ．

$$\frac{\pi^2-8}{16} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

[問題 2]　✿ (6.13) は $-\pi < x < \pi$ で

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ 0 & (x = \pm\pi/2) \\ -\frac{\pi}{4} & (-\pi \le x < -\pi/2;\ \pi/2 < x \le \pi) \end{cases}$$

という関数となることを証明せよ．$x = 0$ とおくと何が得られるか？ $\delta \in (0, \pi/2)$ を任意に与えたとき，この式は $-\pi/2 + \delta < x < \pi/2 - \delta$ において一様収束することを示せ．フーリエは，一様収束の概念を持っていたわけではないが，彼の本の 188 節において，ほぼこれに近い主張をしていることを確かめよ．

[問題 3]　✿✿ $x \in (-\pi, \pi)$ とし，f が $-\pi \le x \le \pi$ で連続のとき，次式を証明せよ．

$$\lim_{r\uparrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)f(y)}{1+r^2-2r\cos(x-y)}\mathrm{d}y = f(x).$$

第7章　フーリエ級数の収束

本章ではフーリエ級数の収束について議論する．前章と本章を分けたのは，本章がきわめて技術的であることが理由である．したがって，技術的なところに興味のない読者は本章をとばしてもかまわない．

7.1　フーリエ級数の収束：ディリクレ

フーリエ級数の収束証明に最初に成功したのはディリクレ[1]である．彼は

定理 7.1　$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ が次の条件

1. 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ において，不連続点は有限個しかない
2. 極大値と極小値が有限個しかなく，極値をとる点の間では f は単調非減少あるいは単調非増大である

を満たすならばフーリエ級数 (6.1) は収束する．ただし，x が f の連続点ならば $f(x)$ に収束し，x が f の不連続点ならば $\frac{1}{2}\left(\lim_{h\downarrow 0} f(x+h) + \lim_{h\uparrow 0} f(x+h)\right)$ に収束する．

を証明した（[364], 1829 年）．要するに，区分的に連続で区分的に単調な関数のフーリエ級数は収束する，というわけである．当時すでにボルツァーノ－コーシーの意味で連続な関数という概念はある程度定着していたから，連続性に関する何らかの仮定を置くことは許されるであろう．しかし，ディリクレは彼の結果に完全に満足したわけではなく，極値が有限個しかないという条件を取り除こうとしたらしい．（[118] の 10 ページ）．しかし，何らかの制限条件なしに収束証明を与えることは彼にはできなかった．

ディリクレの論文 [364] はいろんな意味で画期的である．彼は，x が有理数ならばある定数となり，無理数では別の定数となる関数をここで導入した．それまでの数学者は「全く任意の関数」と言いながら，実際に念頭に置いていたのは区分的

1　Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)．ディリクレはドイツ人．ドイツ以外ではディリシュレと発音されることが多い．[25] にはディリクレはフランスからドイツに移住した家系に生まれたとあるが，これは間違い．元々ベルギーから移住した家系である．[1] を見よ．当時ドイツの大学のレベルが低かったので彼の父は彼をパリで勉強させることにした．パリに留学してそこでフーリエを含む多くのフランス人数学者の教えを受け，フーリエ級数の理論に取りかかった．

に解析的な関数のみであった．しかし，彼以降は，現代的な意味で全く任意の関数というものを考えるようになった．この点で，ディリクレの歴史的意味は大変大きい．なぜ彼はこのような関数を考えるようになったのであろうか？ そのわけは彼の論文の最後の方を読むとわかる．フーリエ級数の収束証明のために彼は上のような条件を付けたのであるが，彼はこの条件はもっと緩めることができると信じていた．不連続点が無限個あっても結果は正しいはずだと思っていたのである．しかし，フーリエ係数が定義できるためには関数が積分できなくてはならない．当時積分がきちんと定義できていたのは連続関数までであり，不連続関数一般に対する積分論は存在していなかった．そこで彼は，積分が意味を持つためには，次のような条件が必要である[2]と説く：

> 任意の開区間 (a,b) に対して，f が連続となる空でない開部分区間 (c,d) が必ず存在する．([364] の最後のページ)

これは，現代の言葉で言えば，関数の不連続点の集合がまばら (nowhere dense) であるということに他ならない．引き続いて彼は，そのような条件を満たさない関数もあることを例示するためにディリクレの不連続関数

$$f(x) = \begin{cases} c & (x \in \mathbb{Q}) \\ d & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

を挙げているのである．そして，「こんな関数には積分は意味が無かろう」と断言する[3]．最後に彼は，不連続集合がまばらで，至るところで有限な関数についてもフーリエ級数が収束することを別の論文で証明する予定であると結んでいる．しかし，その論文が出ることは決してなかった．

7.2　フーリエ級数の収束：様々な十分条件

現在では，収束のための様々な十分条件が知られているのでそのうちのいくつかを紹介しよう．証明は [160, 275] あるいは [8] を見よ．

有界変動関数というクラスはしばしば重要な働きをする．これについて短くまとめておこう．

定義 7.1　$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ が有界変動関数 (function of bounded variation) で

2　なぜこの条件が積分のために必要であるのかは我々には明確でない．

3　彼の結論が悲観的に過ぎることはその後のルベーグ積分論が示すところである．

あるとは，ある定数 $K_0 > 0$ が存在して，任意の有限個の点 $-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leq 1$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq K_0$$

が成立することである（K_0 は N とは無関係にとれなくてはならない）．有界変動関数は有界変分関数と呼ばれることもある．

この概念および次の定理はジョルダン[4][473] によるものである（1881 年）．

定理 7.2 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ が有界変動ならばフーリエ級数 (6.1) は収束する．ただし，f が x で連続ならば $f(x)$ に収束し，連続でないならば $(f(x+0) + f(x-0))/2$ に収束する．

ディリクレの定理 7.1 で要請された条件が満たされれば有界変動になる．定理 7.2 では関数に連続性を仮定する必要はないから，その関数は無限個の不連続点を持ってもよい．この意味でこの定理はディリクレの定理の拡張になっている．

定義 7.2 $\alpha \in (0, 1]$ とする．$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ が α 次リプシッツ連続であるとは，ある定数 $M > 0$ が存在して，任意の 2 点 $x, y \in [-\pi, \pi]$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

が成立することである[5]．

定理 7.3 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ が何らかの $\alpha > 0$ について α 次リプシッツ連続であるならばフーリエ級数 (6.1) は収束する．

リプシッツ連続な関数は極大極小を無限個持っていてもよいから，その意味で，この定理（[512] の定理 2，1864 年）はディリクレの定理 7.1 の拡張になっている．

リプシッツによるこの定理は，次の定理（ディーニの判定条件と呼ばれる．[129] の 102 ページ）の特別な場合と見ることもできる：

---

4 Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922). 行列のジョルダン標準系や積分法などで著名．

5 $0 < \alpha < 1$ ならば，α 次リプシッツ連続と呼ばず，α 次ヘルダー連続と呼ぶことも多い．日本では $\alpha = 1$ の場合だけをリプシッツ条件と呼び，$0 < \alpha < 1$ の場合をヘルダー条件と呼び分けていることがほとんどであるが，ヘルダーの論文はリプシッツよりもずっと後に出たものであり，リプシッツ自身は α に区別はつけていない．後，1876 年，常微分方程式の解の一意性の論文 [513] において彼は 1 次リプシッツ条件から一意性が従うことを証明している．いずれにせよヘルダーよりも早い（[173] の 152 ページを見よ．1882 年）から，奇妙な習慣である．

定理 7.4 t を固定する．$\delta > 0$ に対して

$$\omega(\delta, t) = \sup_{|\eta|<\delta} |f(t) - f(t+\eta)|$$

とおく．もし，ある $c > 0$ について

$$\int_0^c \frac{1}{\delta}\omega(\delta, t)\,\mathrm{d}\delta < \infty$$

ならばフーリエ級数は $x = t$ において収束し，その値は $f(t)$ に等しい．

さらに，この定理は次の定理の特別な場合と見ることもできる：

定理 7.5 t を固定する．ある $\delta > 0$ が存在して

$$\int_0^\delta \frac{1}{x}\,|f(t+x) + f(t-x) - 2c|\,\mathrm{d}x < \infty$$

ならばフーリエ級数は $x = t$ において収束し，その値は c に等しい．

これ以外にも様々な十分条件が知られているが，これ以上は述べない．重要なのは「至る所で連続だが，フーリエ級数が発散する例がある」ということである．連続であるということとフーリエ級数が収束するということは直接の関係を持たないのである．そのような例は現在ではいくつも知られているが，最初にそのような例があることを発見したのはデュ・ボア・レイモン[6]で，1875 年のことである ([368])．彼の結果は，「フーリエ級数が収束しない連続関数が存在する」という存在定理であり具体的な関数で示した訳ではなかったらしい．らしいというのは，彼の論文が理解できないためである．ハーディー [448] によれば，

> しかしながら，彼（つまりデュ・モア・レイモンの）解析は非常に込み入っており，しかも曖昧な書き方がされているため，彼が何を証明して何を証明しなかったのかを言うことはしばしば困難である．いずれにせよ，そのままでは，彼の解析のうちに現代の数学者が結論として受容できるところはほとんどないと言えよう．

ということなので，読んでみてもよくわからないのは不思議ではない．シュヴァルツ[7]は彼のアイデアに基づいて初等的な例を構成した（[160] の 50 ページ）を参照せよ）．猪狩 [8] にも初等的な証明がのっているが，これはフェイェール[8][404] に

---

6 Paul David Gustav Du Bois-Reymond (1831-1889).

7 Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).

8 Lipót Fejér (1880-1959). 論文には Leopold Fejér と書かれていることが多い．

よるものである．フェイエール [405] は $0 \le x \le \pi$ 上の連続関数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(2^{n^3} x\right) \tag{7.1}$$

のフーリエ余弦展開が $x = 0$ で発散することを示した．（この関数を $-\pi \le x \le \pi$ に奇関数として延長したら上の展開がフーリエ展開になる．従ってそのフーリエ級数は至るところ収束する．しかし，偶関数として延長したらその関数のフーリエ級数は $x = 0$ で収束しないのである）．(7.1) は至るところ微分できない関数であるがこれをグラフに表そうとしてもうまくいかない．2^{n^3} があまりにも急激に発散し同時に n^{-2} の減少が遅いからである．連続であるがフーリエ級数が少なくとも 1 点で収束しないものが存在することを関数解析の手法で示すことができる．これについては [227] の 100–102 ページ，あるいは [171] の 72 ページを参照せよ．

こうした例ではある 1 点でフーリエ級数が発散する．これを用いて，有限個の点でフーリエ級数が発散するような連続関数を作ることは易しい．しかし，どれくらい多くの点で発散し得るのかは長い間わからなかった．これについてはすぐ後で検討するが，その前にもう一つ重要な事実を紹介しておこう．こういう反例を見てしまうとフーリエ級数は本当に役立つのであろうかと心配になってくるかもしれないが，収束の意味を拡張すれば収束は保証される．有名なのはフェイエールの定理であろう．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ に対して，

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x), \qquad \sigma_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} S_k(x), \tag{7.2}$$

とおく．もしも $\lim_{N\to\infty} S_N$ が存在すれば $\lim_{N\to\infty} \sigma_N$ も存在する．しかし，逆は必ずしも成り立つわけではない．そこで，$\lim_{N\to\infty} S_N$ が存在するかどうかにかかわらず $\lim_{N\to\infty} \sigma_N$ が存在するときに元の級数はチェザロ総和可能という．これは便利な概念である．たとえば次の定理が成り立つ．

定理 7.6 f が $-\pi \le x \le \pi$ で有界かつ積分可能であると仮定する．もしも f が x_0 で連続ならば，フーリエ級数は x_0 でチェザロ総和可能である[9]．

系 7.1 $f(\pi) = f(-\pi)$ ならば，任意の連続関数のフーリエ級数はすべての点でチェザロ総和可能である．

9 ただし，$x_0 = \pm\pi$ ならば，$f(\pi) = f(-\pi)$ と仮定する．

これは 1900 年にフェイェール [402] が証明したもので，収束の意味をチェザロ和の意味に拡張すれば収束は保証される，ということであるから，フーリエ級数を使うものにとっては喜ぶべきものであろう．証明はたとえば [171, 275] を見よ．

ルベーグ積分の理論が定着すると測度論的な命題が論ぜられるようになる．

定義 7.3 $1 \leq p < \infty$ とする．

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty$$

であるルベーグ可測関数全体を L^p と表すことにする．

定理 7.7 $f \in L^1$ ならば，ほとんど至るところで，

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

が成立する[10]．

証明は [171] を見よ．

こうした定理はフーリエ級数の拡張された意味の収束を保証するものであると見なすことができる．しかし，元々の各点収束の問題が解決したわけではない．1913 年，ルージン[11]は [516] において，自乗可積分な関数のフーリエ級数はほとんど至るところ収束するであろうと予想した．連続関数は自乗可積分であるから，この予想が正しければ発散する点の集合の測度はゼロであるということになる．ルージンは $f \in L^2$ に対してほとんど至るところ収束することを確信しているようであるが，一方でその論文の最後において L^1 と L^2 の違いを強調しており，彼の予想が $f \in L^1$ については成り立たない可能性を示唆しているようにも読める．これはその後コルモゴロフによって明らかとなった．一方で，ハーディーは [449] において

定理 7.8 $f \in L^1$ ならば，すべての点 x で

$$\lim_{N \to \infty} \frac{|S_N(f)(x)|}{\log N} = 0.$$

を証明している．だから，1913 年の段階では，可積分関数のフーリエ級数が発散するとしてもきわめて緩やかなものであることはわかっていた．

コルモゴロフ [490] は 1923 年に，ほとんど至るところフーリエ級数が発散する

10 この定理は 1905 年，ルベーグ [504] による．

11 Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950).

可積分関数が存在することを証明して世の中を驚かせたが，このとき彼はまだ20歳であった[12]．コルモゴロフの例を説明するのにそれほどのページ数を必要とするわけではないが，中身は結構複雑であるのでここでは証明しない．[160] の70ページ，あるいは [77] の430ページ，[275] の第1巻305ページを見てほしい．

こうなると，ルージンの予想が正しいのかどうか是非とも知りたくなるところであるが，これは長い間未解決問題として残された．

最終的に解決されたのは1966年のことである：カールソン [332] が $f \in L^2$ ならば至るところでフーリエ級数が収束することを証明した[13]．その後，ハント [467] がその結果を $f \in L^p$（ただし $1 < p$）のときに拡張した．

定理 7.9(the Carleson-Hunt Theorem) $p > 1$ で $f \in L^p$ ならば，そのフーリエ級数はほとんど至るところ収束する．

f が $[-\pi, \pi]$ で連続ならば $f \in L^p$ であるから，連続関数のフーリエ級数はほとんど至るところ収束することが系として成り立つ．

定理7.9の証明は複雑で長いからここで紹介することはできない．不思議なことに，カールソンは [275] しか引用していない．特に新しいことを使っているわけでもないが，既知の結果を深く理解していなければ理解できない証明なのだという（[122]）．[122, 168] を参照してほしい．

7.3 フーリエ級数論の意義

ルベーグ可積分な関数 f に対して (6.2) は問題なく定義できる．これを用いて形式的な級数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (-\pi \le x \le \pi). \tag{7.3}$$

を考えることは可能である．収束しないときにはこれは元の関数 f と全く無関係で，意味のないものなのであろうか？ アーベルは発散する級数は悪魔の作ったものであって，発散級数に基づいて証明をすることは恥である，と書いた（アーベル全集第2巻256-257ページ）．しかし，彼の主張を「発散級数は全く意味のないものである」というふうに解釈してはならない（第I部第3章）．発散する級数でも

12 その後彼は [491] において，すべての点でフーリエ級数が発散する可積分関数の存在も証明した．

13 Lennart Axel Edvard Carleson, 1928年3月18日ストックホルム生まれ．2006年のアーベル賞受賞者．詳しいことは Abel Prize のウェブページを参照．

きわめて重要な働きをすることがあることがその後認識されるようになったのである ([159]).

一方で，収束の意味が各点収束というものから平均収束，あるいは測度としての収束といった高度なものに進化し，その枠組みの中では，任意の連続関数は言うに及ばず，任意の可積分関数などについて (6.1) が何らかの意味で正しいことが理解されるのである．これに関してリーマン[14]の貢献について触れておこう．リーマンは教授資格試験の候補論文としてフーリエ級数に関するものを用意していた．試験官だったガウスはこれを選ばず，結局彼は幾何学に関する論文で審査を通り，フーリエ級数に関する論文は彼の死後になってようやく出版されたのであるが，この論文 [574] はその後の実関数論に大きな影響を与えた[15]．彼はその中で今日我々がリーマン積分と呼ぶものを定義していたし，様々な新しい問題を提起していた．その中で，これまでとは逆の立場からフーリエ級数を眺め，その後の発展に通ずる考察をしている．たとえば彼は次の定理を証明した：

定理 7.10 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ がリーマン可積分であるならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

である．

証明は [8][9] などを見よ．また，章末問題の 3 からも導くことができる．f が $[-\pi, \pi]$ で連続ならば証明は簡単であるから読者はこの場合に自分で証明を試みてほしい．リーマンの頃には，フーリエ級数に関するディリクレの収束証明はよく知られたものになっていたから，

- 性質のいい関数（たとえば連続関数？）のフーリエ級数は収束し，それは元の関数に等しい

ということをほとんどの人々は期待していた．そういう期待はデュ・ボア・レイモンの否定的な結果によって裏切られるが，その逆の問題を考え始めたのはリーマンである．

たとえば次のような問題が考えられる．

R0 もしフーリエ級数が収束するならば関数はどういう性質を持たねばならないか？

---

14 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

15 [69]．本書の著者の一人もこれを [71] に和訳したので，参考にしていただければ幸いである．

R1（関数を先に与えるのではなく）数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ を先に任意に与えて (6.1) を考える．もしこれが収束したとすると，それはどのような関数を与えるか？

R2 関数から a_n, b_n を (6.2) で定義した場合でも問題はある．a_n, b_n を (6.2) で定義し，それに対し (6.1) が収束するとき，その収束先は元の関数の値に等しいのか？

問題 **R1** のような問題を逆問題と呼ぶ．これに対し，フーリエ級数の収束の問題のようなものを順問題と呼ぶ．もちろん，どちらを順と呼びどちらを逆と呼ぶかは立場の問題ではあるが，通常の思考方向とは逆に考えるとき逆問題と呼ぶ．さて，逆問題には順問題にはない面白い様相がしばしば現れる ([61])．たとえば，「円を平面内の任意の直線に射影すると一定の長さの線分になる」というのは誰にでも理解できるであろう．証明も難しいものではない．しかし，その逆命題「平面内のどのような直線に射影しても一定の長さの線分になる凸図形は円である」が正しいかどうかはすぐにはわからないであろう．これは実は正しくないことが知られている ([221])．

数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ がゼロに収束しなければ，定理 7.10 によって，それは可積分な関数のフーリエ係数にはなり得ない．そこで，

問題 I　ゼロに収束する任意の数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ が与えられたとき，それらをフーリエ級数に持つ可積分関数は常に存在するか？

という問題を考えることができる．あるいは次のような問題を考えることもできる：

問題 II $\{a_n\},\{b_n\}$ が与えられたとき，(6.1) が各 x で収束するものと仮定する．このとき (6.1) で決まる関数を $f(x)$ とする．この f に対して (6.2) でフーリエ係数を定めるとそれはもとの $\{a_n\},\{b_n\}$ に一致するか？

問題 I の答えは No である ([227])．問題 II で各点収束することを仮定することは重要である．実際，ルージンは 1911 年に，ゼロに収束する a_n, b_n を係数に持つ三角級数で，ほとんど至るところ発散するものが存在することを証明した ([515])．スタインハウスは 1912 年にすべての点で発散する三角級数の存在を証明している ([599],[210] の II 巻 228 ページ)．問題 II はカントルの集合論の出発点となったという事実からもその重要性がわかる（[118]．また，次節参照）．

もし f が 2π 周期で C^1 級ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{n}f(x)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

となる．従って，「f が 2π 周期で C^1 級ならば $a_n = o(n^{-1})$, $b_n = o(n^{-1})$」であることがわかる．同様に，f が C^2 級で，かつ，f も f' も 2π 周期ならば $a_n = o(n^{-2})$, $b_n = o(n^{-2})$」であることがわかる．これから類推できることは「関数の性質がよいほどフーリエ係数はより速く減衰する」ということである．f が単に可積分であるというだけならば，ただ単にゼロに収束するということだけしか期待できず，減衰の速さは期待できない．それでは，ただ単に連続であるという場合にどの程度の減衰が期待できるのであろうか？

答え． ゼロに収束する任意の正数列 $\{\eta_n\}$ が与えられたとする（どのように遅くゼロに収束してもよい）．このとき適当な連続関数をとると，そのフーリエ係数が，「いかに大きな m に対しても，ある $m' > m$ が存在して $|a_{m'}| > \eta_{m'}$ となる」ようにできる（[160] の 25 ページ参照）．

これからわかるように，可積分関数を連続関数に制限してもフーリエ級数の減衰には大きな変化がない．

フーリエ級数の問題点は，しばしば収束が遅いことである．たとえば図 6.2 でも水平でなければならないところで波打っているところがある．これが不連続関数の場合にはもっと顕著に表れる．不連続でもディリクレの定理によって各点で収束し得る．しかし，決して一様収束するわけではない．これは数値解析では注意せねばならないものである．たとえば次の例を考えてみる．

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x+\pi & (-\pi \le x < 0), \\ 0 & (x=0), \\ x-\pi & (0 < x \le \pi) \end{cases} \tag{7.4}$$

これを n について 10, 50, 200 まで和を取ったグラフを図 7.1 に描いた．$x = 0$ の近傍で振動していることが見て取れる．この振動は $n \to \infty$ としても決して消えることなく振幅もゼロにはならない．これはギブズ現象と呼ばれる現象である．これについては付録 C をご覧いただきたい．

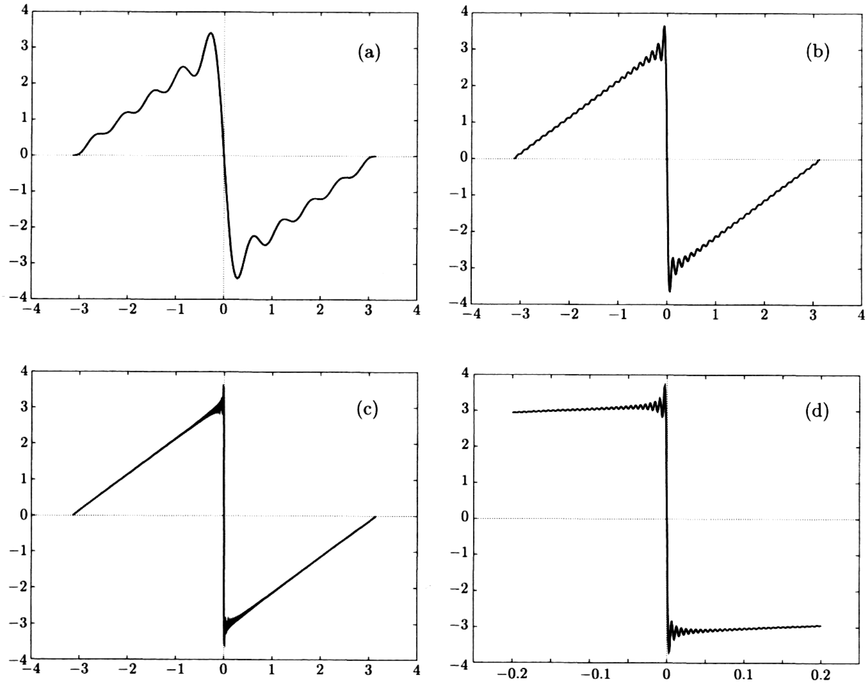


図 7.1　ギブズ現象．(7.4) の和を $n = 10, 50, 200, 1000$ 取ったときのグラフ．それぞれ (a), (b), (c), (d)．(d) では $-0.2 \le x \le 0.2$ のみを拡大して描いてある．

7.4　フーリエ展開の一意性

リーマンの論文からハイネ[16][461] が次のような問題を考えるに至った．

問題　もし

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\} \tag{7.5}$$

が $-\pi \le x \le \pi$ のすべての点で成り立つ（つまり右辺がすべての点で収束し，その値がゼロに等しくなる）ならば，すべての n について $a_n = 0, b_n = 0$ であるか？

ハイネは次の定理を証明した．

16 Heinrich Eduard Heine (1821-1881)．一様連続の項参照．

定理 7.11 (7.5) が有限個の例外点を除いて成り立ち，しかも，例外点を除いた開区間で広義一様収束すると仮定する．このとき，すべての n について $a_n = 0, b_n = 0$ である．

ハイネの結果は，一様収束を仮定している点でまだまだ不十分なものである．この定理をカントル[17]はかなり拡張することに成功した．

定理 7.12 (カントルの一意性定理 [328])

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

において，右辺が有限個の例外点を除くすべての x について各点収束するならば，すべての n について $a_n = b_n = 0$.

カントルの定理はハイネのものに比べて格段に進歩している．各点収束は広義一様収束に比べてはるかに緩い条件である．では，例外点はどの程度許されるのであろうか？ 次の例が示すように，例外点が多過ぎると一意性定理は成り立たない．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!x)$$

は，x が π の有理数倍ならば有限和となるので，収束するが，ゼロでない係数を持つ．したがって，どの程度の例外を認めることができるかが次の問題となる．カントルは次の概念を導入した．

定義 7.4 P を実数からなる集合とする．このとき，実数 x が P の集積点であるとは，x の任意の近傍が P の点を無限個含むことである．実数からなる集合 P に対してそのすべての集積点の集合を P の導集合と呼び，P' と表す．

P が有限集合ならば $P' = \emptyset$ であることはすぐにわかる．P が有界な無限集合ならば $P' \neq \emptyset$ であることは，実数の連続性と同等な命題である．

定義 7.5 P の導集合 P' に対してその導集合を定義することができる．これを $P^{(2)}$ と表す．以下，帰納的に，$P^{(n)}$ の導集合として $P^{(n+1)}$ を定義する

17 Georg Cantor (1845-1918). カントルと言えば集合論の生みの親であることは誰でも知っていようが，その出発点がこのようなフーリエ級数の研究であったことはそれほど知られていない．その伝記として [118] をお薦めする．

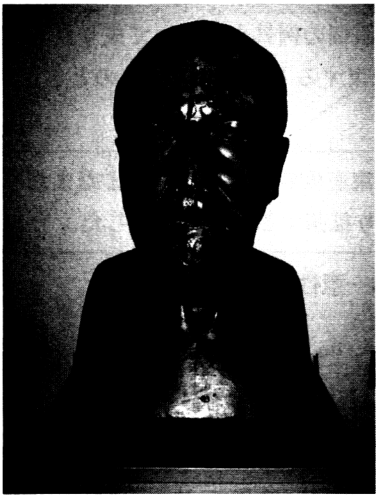


図 7.2 ハレ大学にあるカントルの胸像（2012 年清水扇丈氏撮影）.

$(n = 1, 2, \cdots)$．ただし $P^{(1)} = P'$ とする．このとき，ある自然数 ν に対して $P^{(\nu)} = \emptyset$ となるとき P は第一種であると呼ぶことにし，どのような自然数 ν についても $P^{(\nu)} \neq \emptyset$ であるとき第二種であると呼ぶことにする．

注意 7.1 有理数全体 $\mathbb{Q}$ について $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$．したがって，$\mathbb{Q}$ は第二種である．もう少し一般に，ある開集合で稠密となる集合は第二種である．ν を任意に与えられた自然数とするとき，$P^{(\nu)} \neq \emptyset$ であるが $P^{(\nu+1)} = \emptyset$ となるような集合 P の例を具体的に作ることができる．

カントルは次の定理を証明した．これはカントルの集合論へと向かってゆく第一歩となる．

定理 7.13（カントル [329]） P が第一種であるとし，(7.5) が $[-\pi, \pi] \setminus P$ で成り立つならばすべての n について $a_n = 0, b_n = 0$ である．

注意 7.2 実数を有理数のみを使って厳密に定義することはデデキントとカントルに始まると言われているが，出版はハイネ [462] とカントル [329] のものの方が早い．実際 [38] の序文を読めば，デデキントは，ハイネやカントルの論文を読んで自身の結果の公表を急いだことがわかる．

7.5 収束の意味

次の定理はリース－フィッシャーの定理 ([407, 575]) と呼ばれ，関数解析の先駆けとなった定理である ([126]).

定理 7.14(the Riesz − Fischer theorem) 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$$

を満たすならば，それらをフーリエ係数に持ち，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$$

である関数が存在する．逆に，$f \in L^2$ ならばそのフーリエ級数について

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\|_{L^2} = 0$$

が成立する．ここで，S_N は，フーリエ級数を N 項まで和をとったものを表す．

もっと一般に，

定理 7.15 $1 < p < \infty$ とする．$f \in L^p$ ならばそのフーリエ級数について

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_N\|_{L^p} = 0$$

が成立する．

証明はたとえば [171, 259, 275] を見よ．この定理は $p = 1, p = \infty$ については成り立たない．リース－フィッシャーの定理からの類推で，「もしも $f \in L^1$ ならばそのフーリエ部分和 S_N は L^1 の強位相で収束する」という命題が成り立ちそうに思えるかもしれないが，これは成立しない．証明は [171] を見よ．

フーリエ級数についてハルモスは，「収束することが証明される前にフーリエ級数が発見されたのは歴史的な不幸である.」と述べているが ([444])，これはナンセンスである．厳密な議論が展開できる以前に定式化がきちんとできている，というふうに理解すれば，歴史的な展開はむしろ数学者にとってラッキーだったと言うべ

きであろう．フーリエ級数論はその後，積分論の厳密化[18]を促し，カントルの集合論の源になるなど([118])，現代数学の基礎としてなくてはならないものになっていった．たとえば，通常の意味では発散するフーリエ級数でも意味を付けることが可能になっていき，それは解析学の進展にきわめて重要な働きをすることになる．たとえば，$\{a_n\}, \{b_n\}$ を任意の有界数列としたとき (6.1) はほとんどの場合意味を持たない．しかし，

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

と定義すると，$N \to \infty$ のとき，S_N はある超関数に（超関数の意味で）収束することが証明でき，その拡張された意味である超関数を定義するのである．実際，超関数としてフーリエ級数が収束するためには係数が有界であることでさえ必要ではない：

定理 7.16 ある自然数 M が存在して，$n \to \infty$ のとき $a_n = O(n^M), b_n = O(n^M)$ であると仮定する．このとき，三角級数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は超関数の意味で収束する．

具体例としてはディラックのデルタ関数が挙げられる．$f \in C[-\pi, \pi]$ に対して $\langle \delta, f \rangle = f(0)$ を対応させる汎関数がデルタ関数である．これは

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) f(x)\, \mathrm{d}x = f(0)$$

という形で，象徴的に表されることが多い．この超関数は

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

とフーリエ展開できる．超関数は項別微分ができるので，次式を得る．

$$\delta'(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx.$$

18 $\int f(x) \cos nx \mathrm{d}x$ の意味をフーリエは面積ととらえ，直感的に明らかとしていたのである．しかし，ディリクレの関数はそうした直感を否定する．

フーリエ級数に関する初等的な入門書としては [44] がよい．もう少し専門的なものとしては [160] が短い割には中身の濃いもので大変お薦めできる (一般にハーディーの書いた教科書は優れている)．フーリエ級数の歴史については [96, 321, 425, 499] がよい．超関数や関数解析との関連では [6] が好著である．フーリエ解析に関する百科事典的な文献として [181, 275] を挙げておく．

1753	弦の方程式の解の正弦関数による表示（D. ベルヌーイ）
1807	フーリエによる「一般の関数」の $\sin, \cos$ による展開可能性の主張
1820	ポアソンによるフーリエ級数の収束証明（間違っていた）
1827	コーシーによるフーリエ級数の収束証明（間違っていた）
1829	ディリクレによるフーリエ級数の収束証明
1829	ディリクレの関数：有理数で 1，無理数で 0
1854	リーマン積分の定義．フーリエ級数に関するリーマンの定理．1868 年出版
1864	リプシッツによるディリクレの定理の拡張（定理 7.3）
1870	稠密な点で微分不可能になる連続関数の存在（ハンケル）
1875	連続だがフーリエ級数が発散することもある（デュ・ボア・レイモン）
1907	フーリエ級数の平均収束（フィッシャーとリース）
1912	係数はゼロに収束するが至る所発散する三角級数（スタインハウス）
1913	係数はゼロに収束するがほとんど至る所発散する三角級数（ルージン）
1913	L^2 ならばフーリエ級数はほとんど至る所収束するという予想（ルージン）
1923	ほとんど至るところでフーリエ級数が発散する可積分関数の存在（コルモゴロフ）
1926	区間内のすべての点でフーリエ級数が発散する可積分関数の存在（コルモゴロフ）
1966	自乗可積分ならばほとんど至るところでフーリエ級数は収束する（カールソン）

18 世紀から 19 世紀のイギリスにおける数学の退潮には著しいものがあることを象徴するような事実が [255] に見られる．このテイト－トムソン [255] という本は 19 世紀数理物理学の集大成であるという評価を得ている本である．しかし，連続関数であってもフーリエ級数が収束しないことがあることが判明したずっと後の 1912 年の段階で，まだ「任意の関数についてフーリエ級数は収束する」という定理とその証明をのせている（77 節）．ボーム著，*Quantum Theory*（1951 年）では，任意の関数はフーリエ級数に展開できるとしているが，脚注で，「ただし区分的に連続であると仮定する」としている．[255] よりは進歩しているが，それでも不十分であることに気づいていない．数学的事実はなかなか浸透しないようである．

＊　＊　＊

演習問題

[問題 1]　✿✿ アーベルの方法 (5.5 節) を見習って，級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n} \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

がすべての x で収束することを証明せよ．

[問題 2] ✿✿ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$ は $x = 2m\pi$(m は整数) 以外では収束することを証明せよ．$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$ は可積分ではないが $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$ は可積分である．

[問題 3] ✿ $-\pi \leq x \leq \pi$ で可積分な関数 f のフーリエ係数は

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| \mathrm{d}x$$

を満たすことを証明せよ．

[問題 4] ✿ $-\pi \leq x \leq \pi$ で 2π 周期の連続関数 f が α 次リプシッツ連続であるならばそのフーリエ係数は

$$|a_n| = O(n^{-\alpha}), \qquad |b_n| = O(n^{-\alpha})$$

であることを証明せよ．ただし $0 < \alpha \leq 1$ とする．

[問題 5] ✿ (7.2) において，S_N は発散するが，σ_N は収束するような例を作れ．

[問題 6] ✿✿ 区間 $[a, b]$ 上で定義された関数 f が可積分であるとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

を証明せよ（フェイェール [406]）．このフェイェールの結果はツイグムント（[275] の 49 ページ，376 ページの note）において次のように拡張されている．

> 定理　$f \in L^p(0, 2\pi)$, $g \in L^q(0, 2\pi)$ で，$p^{-1} + q^{-1} = 1$ とする．このとき
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\mathrm{d}x$$
>
> ただし，g は 2π 周期関数として $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張する．

[問題 7] ✿ f は有界関数で，$c_1 \leq f(x) \leq c_2$ であるとする．このとき，$c_1 \leq \sigma_N(x) \leq c_2$.

[問題 8] ✿ f は有界関数で，$c_1 \leq f(x) \leq c_2$ であるとする．このとき，必ずしも $c_1 \leq S_N(x) \leq c_2$ とはならないことを例示せよ．

[問題 9] ✿✿ カントル [328] は次の命題を使っている．関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が連続で，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = 0$$

がすべての $x \in (a, b)$ で成り立つならば，f は x の 1 次式である．これを証明せよ．

[問題 10] ✿✿（コーシーの間違い）コーシーは [337] において次の間違いを犯している（これはディリクレが [364] で指摘した)．二つの実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，

1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する，
2) すべての n について $b_n \neq 0$ であり，かつ，$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$ となる
という 2 条件を満たしているとき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するか？ コーシーは正しいと思っていたが実は正しくない．反例を挙げよ．

[問題 11] ✿ フーリエ級数の具体例を見つけるには，単位円板で正則な関数をテイラー展開するのがよい．たとえば，$0 < a < 1$ のとき $f(z) = 1/(1-az)$ は $|z| \leq 1$ で正則である：

$$\frac{1}{1-ae^{i\theta}} = 1 + ae^{i\theta} + a^2e^{2i\theta} + a^3e^{3i\theta} + \cdots$$

あるいは，$f(z) = \log(1-z)$ を考えてみる．これらから何が得られるか？

[問題 12] ✿✿✿ ルージンが証明した次の定理を証明せよ（[165] の II 巻 549 ページ）．三角級数が，ある測度正の集合上で絶対収束するならば

$$\sum_n (|a_n| + |b_n|)$$

は収束する．

[問題 13] ✿ カントルは [327] において次の定理を証明した：

> **定理 7.17**　ある区間 $a < x < b$ 内のすべての x において
>
> $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$
>
> が各点収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ である．

を証明した．この定理を認めた上で，次の定理を証明せよ．

> **定理 7.18**　三角級数
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
>
> がある区間 $a < x < b$ で各点収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ である．

[問題 14] ✿ ルベーグ（[190] の 110 ページ）は定理 7.17 を次のように拡張した．

> **定理 7.19**　測度が正の集合 E の各点で
>
> $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$
>
> が成り立つならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ である．

カントルの証明は初等的であるが，上手な数列の構成が必要であり，易しくはない．一方，ルベーグの証明は測度論さえ知っていれば簡単である．リーマン－ルベーグの定理では収束は仮定せず，係数が可積分関数のフーリエ級数として書き表せることだけを仮定した．定理 7.17–定理 7.19 ではフーリエ級数で書けるかどうかは仮定せず，収束することだけを仮定している．以上を確認せよ．

[問題 15] ✿✿✿ カントルールベーグの定理（定理 7.19）を証明せよ．

[問題 16] ✿ [255] の 77 節にあるフーリエ級数の証明のどこが間違っているのか，確かめてみよ．

[問題 17] ✿ 任意の自然数 ν に対して，$P^{(\nu)} \neq \emptyset$，$P^{(\nu+1)} = \emptyset$ となる集合 P が存在することを例示せよ．

第8章　連続だが至る所微分不可能な連続関数とその周辺の話題

8.1　連続性と微分可能性

すでに第4章で見たように，連続関数の意味はオイラーの頃とボルツァーノやコーシー以後では異なっている．では，ボルツァーノやコーシーによる連続関数の概念や微分可能性の概念は直ちに数学界に受け入れられたのであろうか？ また，連続性と微分可能性とは別の概念であるというのは直ちに理解されたのであろうか？ 実はそうではなく，この概念が数学者の間に浸透して消化されていくにはずいぶんと長い時間がかかっているのである．実際，アンペール[1]の定理およびその類似が19世紀中頃まで生き残っていたのである ([153, 161, 205])．

定理 8.1 (アンペールの定理，1806年，[283]) 任意の関数は有限個の例外点を除き，その他の点では微分可能である．

もちろん今の我々はこんな定理が成り立たないことを知っているが，笑って軽蔑してはいけない．ここには一つの進歩が見えるからである．オイラーは関数が微分できることは自明のことであって，考察の対象になっていなかった．ラグランジュになると微分ができるということを証明しようとしている（結局できてはいなかった)．アンペールもラグランジュの影響を受けてこれを証明しようとしたわけである．しかしこれはできるはずもなかった．1806年の段階では（連続）関数が何なのかについて何もコンセンサスはなかったからである．[620]によるとアンペールは有界変動関数のようなものを想定していたらしい．アンペールの原論文を読んでみても何が言いたいのか我々にはよくわからないのが正直なところである．しかし，グラビナー[151]によれば，アンペールは微係数を不等式で定義しようとしたという点で新しい視点が見えるという．しかし，「微分できる」という概念を定義しなければならない，とはっきりと認識したのはコーシーである．群論・数論で不朽の名声を得ているガロア[2]が1830年に書いたメモ[419]には，任意の関数が微分

1 André Marie Ampère (1775-1836). 電磁気学にその名を残しているので物理学の方でより著名であるが，エコールポリテクニクでは最初は数学の教授であった．

2 Evariste Galois (1811-1832).

可能であり自分がそれを証明したと勘違いしているふしがある．

少し話題を変えて，次のようなクイズを考えてみよう．$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする．これに関して以下の定義を読み比べてみる：

定義 8.1 f が単調非減小であるとは，$x \le y$ なる任意の $x, y \in [a,b]$ に対して $f(x) \le f(y)$ が成立すること．

定義 8.2 f が連続であるとは，任意の $x \in [a,b]$ において

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = 0$$

が成り立つこと．

定義 8.3 f が微分可能であるとは，任意の $x \in [a,b]$ において

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在すること．

これらが異なる概念であることは明白であろう．しかし，微分可能であることにより近いのは単調性であろうか連続性であろうか？ 連続性の方が表面的には似通っているが，単調性はある意味で右肩上がりになっていることであるから，傾きの存在に近いと言うことができる．しかし，単調関数に連続性は仮定していないのである．単調関数に不連続点があったとしてもそれは高々可算無限個であることがわかっている ([9, 65])．さらに，$[a,b]$ の中の任意の可算集合（稠密であってもよい）が与えられたときにその可算集合を不連続点にするような単調非減少関数を作ることは容易である（章末演習問題）．どちらの概念も微分とはほど遠いように思えるが，以下に示すように，連続であっても至る所で微分できない関数はいくらでも存在するが，単調関数は「ほとんど至るところ」で微分可能なのである（「ほとんど至る所」の意味は後で記す）．

8.2 リーマンの不連続関数

オイラーやラグランジュにとって関数とは解析的な表示式であった．彼らは関数の定義域という概念は基本的に持っておらず，表示式が意味のあるものである限り関数は定義できるものであった．

関数から解析的な表示式という先入観を完全に取り除いたのはディリクレである

([364]，1829 年)．オイラーの関数の定義 2 を突き詰めれば勝手に値を指定しただけの「関数」というものも相手にせねばならないと思い至ったディリクレは偉かったと思う．ディリクレがこうした考えに至ったには理由がある．これについては前章で述べたとおりである．しかし，その後それは予想もしない怪物を解き放つことになる．その先駆けとなるのがリーマンによる，「稠密な点集合で不連続になるが積分可能な関数」である（[574]，1854 年に書かれ，1867 年に出版された)．それは次のように定義される．まず，関数 d を

$$d(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1/2) \\ 0 & (x = 1/2) \\ x - 1 & (1/2 < x \leq 1) \end{cases}$$

で定義する．そしてそれを周期 1 で全数直線上に拡張する．このときリーマンは

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(nx)}{n^2}$$

で関数 R を定義した．これはすべての点で有限の値になり，有界な関数である．既約分数に表したときに分母が偶数となるすべての有理点で右極限と左極限を持つがそれは一致しない．R はそれ以外の点では連続である．R はリーマン積分可能である．コーシーの解析学と比較してみると，リーマンの論文が画期的であることがよくわかる．コーシーは連続関数もしくは区分的に連続なものの積分しか考えていないのに対し，リーマンは一般の不連続関数の中でどのようなものが積分可能になるか，という強い問題意識を持っている．こういった問題意識から様々な不思議な関数が生み出されてくるのである．

1870 年にハンケル[3][447] はおそらくリーマンに刺激を受けたのであろう[4]，次のようなアイデアを述べている．まず $-1 \leq x \leq 1$ で連続であり，$x \neq 0$ では解析的であるが，$x = 0$ では何らかの特異性をもつ関数 φ をとる（たとえば $\varphi(x) = |x|$)．そして

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \varphi(\sin n\pi x) \tag{8.1}$$

とする．ここで彼は $s > 3$ と仮定する．そうすればもちろん，これは連続関数となる．このとき，すべての有理点で φ と同様の特異性が f に発生するであろう，と

3 Hermann Hankel (1839-1873).
4 リーマンの論文は 1854 年に書かれたが，印刷公表になったのは 1867 年である．

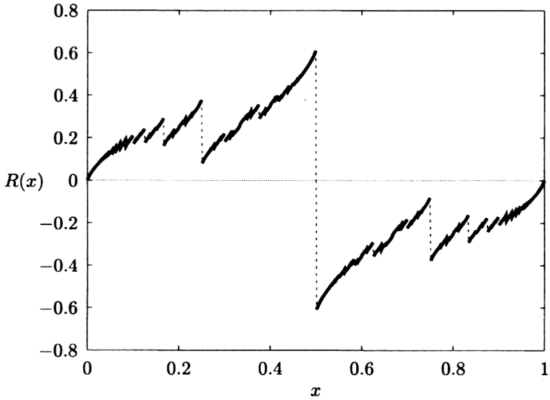


図 8.1 リーマンの，積分可能だが稠密な点集合で不連続な関数．

いうのがハンケルのアイデアである．彼はこうした方法を特異点凝縮法 (Condensationsprincip der Singularitäten) と呼んだ．ハンケルの言っていることはそのままでは必ずしも正しくはないけれど，彼のアイデアを用いれば，至る所連続であるがすべての有理点で微分不可能になるような関数をいくらでも作ることができる．ハンケルはたとえば $\varphi(x) = |x|^{2/3}$ ととっている．

ハンケルはまた，リーマン関数の積分

$$F(x) = \int_0^x R(x)\,\mathrm{d}x$$

はすべての x で連続であるが，R が不連続となるところで微係数が存在しないことを注意しているという（[161] の 44 ページ）．

その後カントール [330] は次のようなアイデアを提唱した．区間 $[0,1]$ で稠密な可算集合 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ をとり

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi(x - r_n)$$

とする．係数 α_n は絶対収束すれば何でもよい．たとえば $\varphi(x) = |x|^{1/3}$ とすると，この関数はすべての $x = r_n$ で微分不可能となる．

シュヴァルツ[5]は 1873 年に微分不可能関数に関する注意書きを発表している ([588])．そこで彼は，彼の関数の微分不可能な点の集合が稠密であることを証明した．しかし，至る所で微分不可能な関数というものを思い浮かべていたわけでは

5 Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)．今日，シュヴァルツはコーシー－シュヴァルツの不等式でその名を残している．それ以外にも偏微分方程式や極小曲面などの様々な分野で大きな業績を残しており，数学史における重要性はきわめて大である．

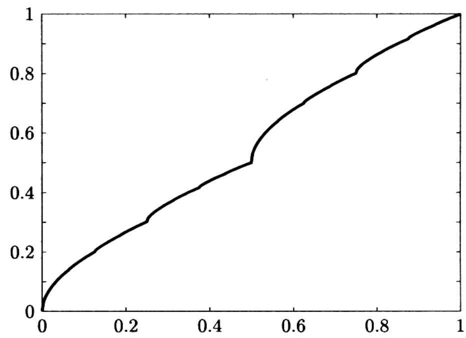


図 8.2 シュヴァルツの関数のグラフ

ない．彼の例は「微分不可能」という言葉を当時の人々がどうとらえていたのかを知るためには意義があるが，数学的にはその後意義を失うことになる．実際，彼の関数は単調増大であるために，ほとんど至るところ微分可能なのである．具体的には，

$$\varphi(x) = \sqrt{x - [x]} + [x] \qquad ([x] \text{ は } x \text{ を超えない最大の整数})$$

とし，

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{4^n}$$

と定義する．一様収束しているので，S は連続である．$S(x)$ は $x = k/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots; k = 0, 1, 2, \cdots, 2^n)$ において微分できない（図 8.2)．

1875 年，トメ [254] は，「不連続点が稠密であるが積分可能な関数」でリーマンの関数よりもずっと簡単なものを発見した．それは今でも多くの教科書に使われているものである．$0 \leq x \leq 1$ 内の無理数 x については $f(x) = 0$ とし，有理数 $x \in (0, 1]$ については x を既約分数で p/q と表したときに $f(x) = 1/q$ と定義する．そして最後に $f(0) = 1$ と定義する．このとき f は有理点で不連続となり，無理点で連続となる．リーマン積分可能で，積分はゼロとなる．これからわかるように，リーマンのアイデアはその公表後，急速に普及していったようである．

8.3 ワイエルシュトラスの微分不可能関数

アンペールの定理が示すように，19 世紀の初めの頃にはすべての連続関数は有限個の例外点を除けば微分可能であると思われていたらしい．一般に，人間は自分

の経験に強く縛られるのが普通で，特に根拠のないことでも経験し易いことだけに基づいて正しいと思いこむことがしばしばある．ハンケル以降は，「連続であるが稠密な点集合で微分できない関数が存在する」ことが認識された．しかし，すべての点で連続だがいかなる点においても微分不可能な関数が存在する，ということが認識されるためにはさらに努力が必要である．これを最初に示したのがワイエルシュトラス[6]である．

ワイエルシュトラス [624] によると，どこでも微分できない関数の例として，リーマンが

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \sin\left(\pi n^2 x\right) \qquad (-1 \le x \le 1) \tag{8.2}$$

を考えたということである[7]．しかし，この関数が微分不可能であることを厳密に示すことは意外に難しく[8]，ワイエルシュトラスがもう少し証明しやすい例として

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \qquad (-1 \le x \le 1) \tag{8.3}$$

を考えた ([624])．彼は，

定理 8.2 b は実数で $0 < b < 1$, a は整数で，しかも奇数．さらに $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ と仮定する．このとき，f はすべての x で微係数を持たない．

を証明した（[624] の日付は 1872 年となっているが，1872 年に出版されたわけではない．この定理が出版物で公表されたのは 1875 年のデュ・ボア・レイモンの [367] である）．ワイエルシュトラスは $ab > 1$ と仮定するだけで微分不可能になると信じていたらしいが，ここに述べたような制限された形でしか証明はできなかった．一般の場合を証明したのはハーディー[9]である．

定理 8.3（ハーディー [450]） b は実数で $0 < b < 1$, a も実数で $ab \ge 1$ と仮定する．このとき，f はすべての x で有限な微係数を持たない．

[624] の証明は初等的でわかりやすい．[450] は明解に書かれているが，読み通すには多少の努力を要する．[624] の証明を読むと，単に微係数が存在しないという

---

6 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

7 1861 年頃の講義でこの関数を導入したと言われている [624].

8 実際，この関数では微分できない点も無限に多く存在するが，微分できる点も無限に多く存在することがその後の研究で明らかにされる．

9 Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

よりももう少し強いことがわかる．微係数が存在しないというときには，$h \to 0$ のとき

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が $+\infty$ あるいは $-\infty$ に近づくということも含まれる．$f(x) = x^{1/3}$ は $x = 0$ で微分可能ではないが，もし $+\infty$ が許されるならば $+\infty$ の微係数を持つという言い方が許される．さて，ワイエルシュトラスの証明を読むと，「$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ならば有限無限を問わず微係数が存在しない」という事実がわかる．さらに，「$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ならば，任意の点 x で

$$\overline{D}^{+} f(x) = +\infty \quad もしくは \quad \underline{D}^{+} f(x) = -\infty$$

かつ，

$$\overline{D}^{-} f(x) = -\infty \quad もしくは \quad \underline{D}^{-} f(x) = +\infty$$

が成り立つ」ことが言える．ここで $\overline{D}^{\pm}, \underline{D}^{\pm}$ はディーニ[10]の微係数で，次のように定義される：

定義 8.4(the Dini derivative)　ディーニの微係数を次式で定義する：

$$\overline{D}^{+} f(x) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad \underline{D}^{+} f(x) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\overline{D}^{-} f(x) = \limsup_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad \underline{D}^{-} f(x) = \liminf_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

定義 8.5　$\overline{D}^{+} f(x) = \underline{D}^{+} f(x)$ が成り立つときこの値を $D^{+} f(X)$ で表し，f の x における右微係数と呼ぶ．$\overline{D}^{-} f(x) = \underline{D}^{-} f(x)$ が成り立つときこの値を $D^{-} f(X)$ で表し，f の x における左微係数と呼ぶ．

注意 8.1　ディーニの微係数はディーニが 1878 年に [128] で導入したものである．上の記号は彼のものではない．彼自身は $\Lambda_x, \lambda_x, \Lambda'_x, \lambda'_x$ と表記している．[128] の 145 節を参照されたい．ディーニの微係数は英語では the Dini derivative あるいは the Dini derivate と呼ばれる．日本語ではディーニの導来数と呼ばれることもある．

10　ディーニ (Ulisse Dini, 1845-1918) はイタリアのピサで活躍した数学者．国会議員になるなど政治家としても活躍した．ピサ市には彼の名前を冠した通りがあるし，その通りには彼の銅像もある．いくつかの優れた教科書も書いたし，フーリエ級数には彼の名前が付いた収束条件（定理 7.4）がある．

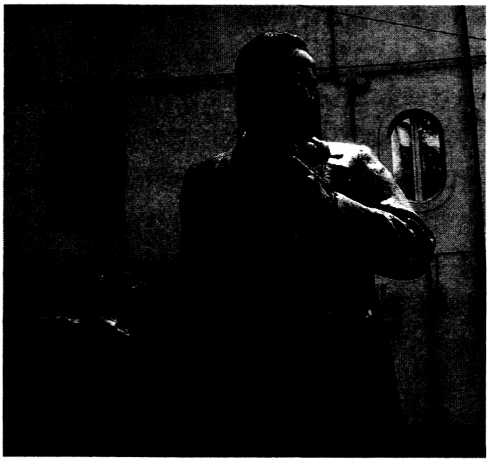


図 8.3 ピサ市にあるディーニの銅像（2005 年岡本久撮影）.

$\pm\infty$ を許せば，すべてのディーニ微係数は存在する．もし x で微分係数が存在するならば $f'(x) = \overline{D}^+f(x) = \underline{D}^+f(x) = \overline{D}^-f(x) = \underline{D}^-f(x)$ である．一般には 4 つのディーニ微係数はバラバラな値をとり得る．たとえば $f(0) = 0$, $f(x) = |x|^{1/2}\sin(1/x)$ $(x < 0)$, $f(x) = |x|\sin(1/x)$ $(x > 0)$ と定義すると

$$\overline{D}^+f(0) = 1, \qquad \underline{D}^+f(0) = -1, \qquad \overline{D}^-f(0) = +\infty, \qquad \underline{D}^-f(0) = -\infty,$$

である．

ディーニの微係数はなぜ必要とされるのであろうか？ 通常の微係数が存在しないときでもディーニの微係数は存在するから確かにこれは便利なものではある．しかしそれだけでは大した役には立たない．ディーニの微係数が有用なのは次の定理が示すように，導関数の代用品となり得るからである：

定理 8.4 f を任意の関数とし，$g = \overline{D}^+f$ とおく．もし g がすべての点で有限で，かつリーマン可積分ならば

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(x)\mathrm{d}x.$$

同様の主張は他の三つのディーニ微係数についても成り立つ．

この定理は [128] の 198 節にあるが，証明を見たければ [443] を見るのがよかろう．この系として次の定理を得る：

定理 8.5 4 つのディーニの導関数のうちのひとつ，たとえば $\overline{D}^+f(x)$ が区間

(a,b) の至る所でゼロならば，f は定数関数である．

次の定理はラグランジュの補題 5.1 の一般化となっている．

定理 8.6 4 種類のディーニの導関数のうちのひとつ，たとえば $\overline{D}^+ f(x)$ が区間 (a,b) の至るところで非負ならば，f は単調非減小である．

ディーニの教科書 [128] はいろんな意味で画期的である．ワイエルシュトラスが結果を公表しなかったのに対し，ディーニは当時の最先端知識を非常に明快な形で教科書として公表したのであるから，後の数学の発展に大きく貢献したと言える．ディーニはワイエルシュトラスの関数（8.3）に対し，ワイエルシュトラスとは別の十分条件を与えている（[128] の 126 節）．

定理 8.7 b は実数で $0 < b < 1$, a は奇整数で，さらに

$$a^2 b > 1 + 3\pi^2, \qquad ab \geq 1$$

と仮定する．このとき，すべての x で f は微係数を持たない．

これもなかなか味のある結果である．$ab = 1$ で $a \geq 31$ ならば微係数の存在しない連続関数になるのである．

彼はまた，連続であるが至る所微分できない関数の例を外にも挙げており，たとえば，p を正の奇数として，

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos^p(a^n \pi x) \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{8.4}$$

を考えている（[128] の 126 節と 129 節）．福沢 [417] によれば，

$$ab > 1 + \frac{3p\pi}{2}$$

ならば f_p は連続だが至る所微分不可能な関数となる．

さて，ハーディー [450] は ab があまり 1 に近いとワイエルシュトラス関数が無限大の微係数を持つこと（つまり，四つのディーニ微係数がすべて $+\infty$ かもしくはすべて $-\infty$ となること）を例示している．つまり ab があまり 1 に近過ぎると無限大の微係数が存在するようになるのである．ワイエルシュトラスの関数はその後も数学者を魅了し続けており，畑政義 [455] は $ab > 5.603\cdots$ のときには有限無限を問わず微係数が存在しないことを証明している．

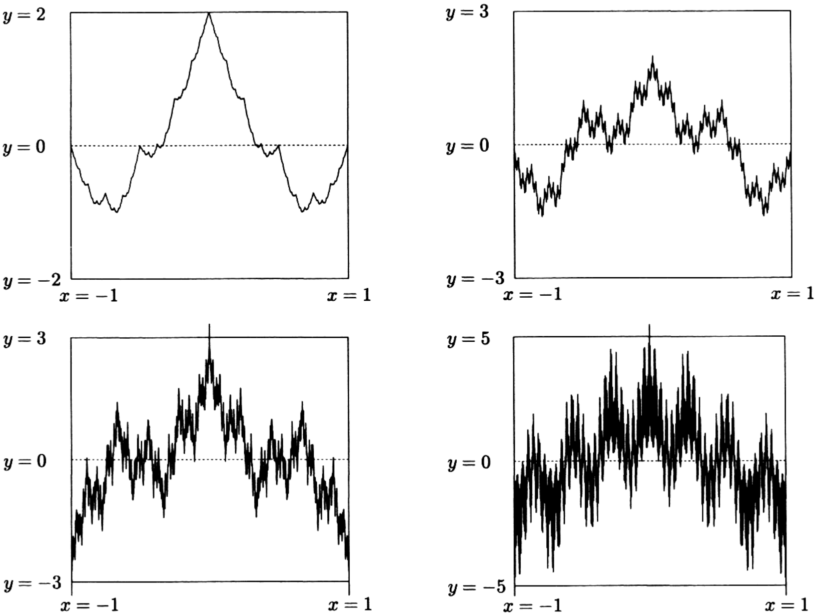


図 8.4 ワイエルシュトラス関数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$ のグラフ．左上：$b=1/2, a=2$．右上：$b=1/2, a=4$．左下：$b=0.7, a=3$．右下：$b=0.818, a=7$．右下のケースだけがワイエルシュトラスの不等式を満たしている．グラフは $[-1,1]$ を 1600 等分して描いた．

注意 8.2 リーマンの関数 (8.2) はほとんど至るところで微分できない（たとえば無理数では微係数が存在しない）が，微分できる点も無限に存在する．詳しくは [423, 596] を見よ．また，リーマン関数に関する解説 [540] は歴史的なことがわかってたいへん面白い解説である．$x=0$ で微係数 $+\infty$ をとることは簡単にわかる．グラフを図 8.5 に描いた．$a=3,4,\cdots$ について

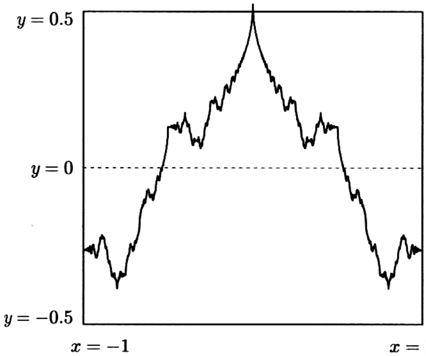
$$f_a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n^a x)}{n^2}$$

と定義しても全く同様に $f_a'(0)=\infty$ である．また，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-x)\\ \frac{\pi}{2}(-1-x)\end{cases}$$

は穏当な関数であることに注意せよ．[517] にはさらに詳しい情報がある．

ダルブー（[355] の 107 ページ）はワイエルシュトラスとは独立に同様のアイデアに達した．彼は，



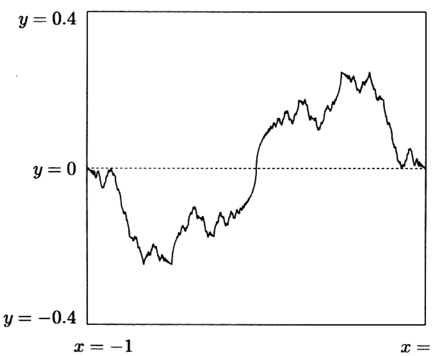


図 8.5 右：リーマン関数 (8.2) のグラフ．左：リーマン関数で sin を cos で置き換えたもの：$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n^2 x)}{\pi n^2}$ のグラフ．

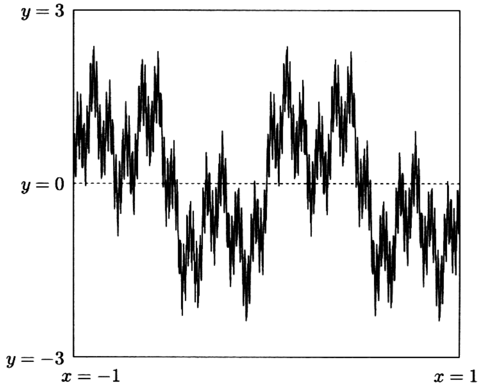


図 8.6 関数 (8.5) のグラフ．$\alpha = 1/3$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!} \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

を連続であるが至る所微分できない関数であるとして紹介している．この関数をそのまま可視化しようとしてもうまくいかない．これは $n!$ があまりに急激に大きくなり過ぎるため，人間の目には細かい構造が見えなくなってしまうためである．これを改良するために $0 < \alpha < 1$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n+1)!\pi x)}{(n!)^{\alpha}} \qquad (-1 \le x \le 1) \tag{8.5}$$

を考えてみると，これは比較的可視化しやすい．$\alpha = 1/3$ の場合を図 8.6 に示す．

セレリエ [343] は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \sin\left(a^n x\right)$$

を考えた．そして，自然数 a が十分に大きいときこの関数が至る所微分不可能な関数になることを示した．ディーニの結果の特別な場合であるが，この論文の出版は 1890 年である．著者の遺稿を整理していた [343] の著者が出版したものであるが，その原稿ができたのは著者によれば 1860 年代であるという．本当であればすごいことであるが，我々には確かめようもない．

8.4　高木関数とその周辺

1903 年，高木貞治は [604]（[252] に再録）において，連続だが至る所微分不可能な関数の非常に簡単な例を与えた．それは，次式で定義される T である．

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi\left(2^n x\right). \tag{8.6}$$

ここで，

$$\psi(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 1-x & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

と定義する．関数 $\psi(x)$ は山型関数あるいはテント関数と呼ばれることがある．(8.6) の形で書くと大変理解しやすいが，高木貞治の元々の定義は実数の二進法表示を使っており，(8.6) と同値であるが直感的な理解はしづらい．高木貞治の論文は英語で書かれており，タイトルも英語なのだが，日本語のタイトルも併記されている．それは

誘導函數ヲ有セザル連續函數ノ簡單ナル例

となっている．導関数ではなく，誘導函数という言葉を使っているところが面白いところである．この論文は学会の報告集のようなものであり，1903 年の 1 月 17 日（土曜日）東京大学内で東京数学物理学会が開かれ，そこで高木貞治によるこの関数の講演があったことが記されている（図 8.9）．この日の出席者は 21 名となっている．

高木関数はその後様々な人によって再発見されている．高木の 5 年後，ファーベル [398] は



図 8.7 高木貞治．写真は高木貞治全集 [252] より．1875 年 4 月 21 日岐阜県大野郡数屋村（現在では本巣市数屋）生まれ．1891 年 9 月，京都の第三高等学校に入学．1894 年，19 歳で（当時日本にただ一つしかなかった）帝国大学理科大学数学科に入った．1898 年より 3 年間ドイツ留学．1901 年，ドイツ留学中に東京帝国大学助教授となる．1904 年教授．1940 年文化勲章受章．1960 年没．[35] も参照せよ．

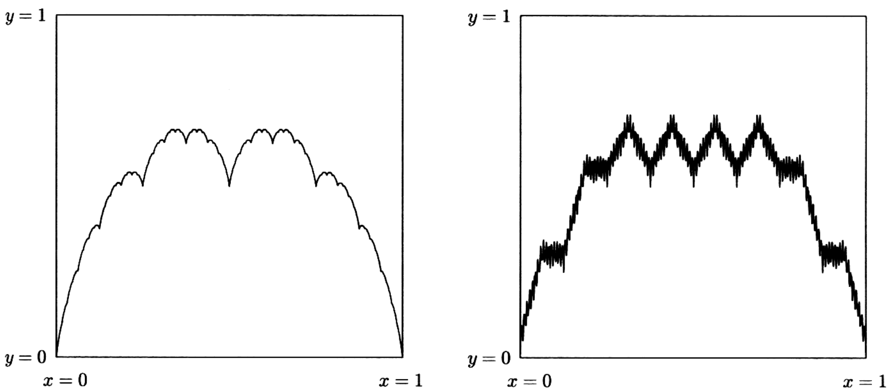


図 8.8 左：高木関数のグラフ．右：マッカーシーの関数（少し変更しているが本質的に同じもの）．

Tōkyō Sugaku-Buturigakkwai

Hōkoku. No. 16.

事務概要

來一月十七日(第三土曜日)午後一時半ヨリ理科大學ニ於テ通常會ヲ開ク。講演次ノ如シ。

擬週期函數ニ關スル林君ノ講演ニ就テ

棒　正董君

誘導函數ヲ有セザル連續函數ノ簡單ナル例

高木貞治君

図 8.9 高木貞治の論文の報告（[604] から抜粋したもの）．1903 年 1 月 17 日に講演があったことがわかる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \psi \left(2^{n!} x\right) \tag{8.7}$$

を考えている．これは高木関数とは異なるが，親戚であると言うことができよう．ファーベルは，この関数がいかなる $\alpha \in (0,1)$ についても α 次ヘルダー連続にならないことを証明している．高木関数のほうは任意の $\alpha \in (0,1)$ についてヘルダー連続になるので，ファーベルの関数と高木関数は似てはいるものの，中身はかなり違うものである．同年，ランツベルグ [494] は，高木関数をもう少し一般化した形で再発見している．彼は高木と違って二進法表記で関数を定義するのではなく，(8.6) の形で定義している点でも意義深い．マッカーシー [520] による次の例は，本質的にはファーベルのものと同じである：

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi \left(2^{2^n - 1} x\right) \tag{8.8}$$

ヒルデブラント [464] は高木関数を (8.6) の形で再発見している．[295] は $\pm\infty$ まで込めて，高木関数の微係数の有無を調べている．彼らの結果は，

- $x = k/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots; k = 0, 1, \cdots, 2^n)$ のときには $\pm\infty$ を許容しても微係数は存在しない．
- x がそれ以外のとき，x を二進展開したときに n 番目までに現れる 0 の個数を O_n, 1 の個数を I_n としたとき，$D_n = O_n - I_n$ とおく．もし $\lim_{n\to\infty} D_n$ が存在すればそれは $+\infty$ もしくは $-\infty$ のどちらかであるが，このときはその極限が x における微係数になる．極限が存在しないときは微係数は存在しない．

より詳しい情報が [280, 281] にあるので，これも参考になるであろう．

また高木関数は次のように一般化することができる：

$$F_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \psi \left(a^n x\right). \tag{8.9}$$

ここで a, b は自然数である．$a = b = 2$ の場合が高木関数に相当する．ファン・デル・ヴェルデン [614] は高木貞治の論文を知らずに $a = b = 10$ の場合を発見している（1930 年のことである）．$a = b$ の場合が [291] によって定義されている．[291] によると，$F_{a,a}$ の微分不可能性の証明は，a が奇数であれば多少の修正のもとで $a \geq 3$ の場合にも適用可能であるということである．

クノップ [487] は次の関数を考えた：

$$K_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \psi\left(\beta^n x\right). \tag{8.10}$$

定理 8.8 クノップ，1918　α は実数で $0 < \alpha < 1$, β は自然数で $\alpha\beta > 4$ であるものと仮定する[11]．このとき関数 $K_{\alpha,\beta}$ は $[0,1]$ で連続だが至るところ微分できない関数である．

畑政義と山口昌哉 [458] は，絶対収束する級数 $\{a_n\}$ を用いて

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\psi)^n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \psi(2^{n-1}x) \tag{8.11}$$

という形で表される関数 f を高木族 (Takagi class) と名付けた．ここで，$(2\psi)^n = (2\psi)\circ(2\psi)\circ\cdots\circ(2\psi)$（$n$ 個の合成）である．高木族は非常に多くの微分不可能関数を含むが，たとえば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}(2\psi)^n(x) = x(1-x) \tag{8.12}$$

のような滑らかな関数も含んでいる．河野敬雄 [492] は次の定理を証明した．

定理 8.9　(8.11) において $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と仮定する．このとき，この関数が至るところ微分できない関数になるための必要十分条件は

$$\limsup_{n\to\infty} 2^n |a_n| > 0$$

である．

小平邦彦 [23] にも微分できない関数の例が載っている．彼の例はハンケルの延長線上にある．彼がハンケルの論文を知っていたのかどうかは定かでないが，歴史に残る数学者の小平であるから，自力で思いついたとしても驚くべきことではない．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left|\sin(\pi n! x)\right| \tag{8.13}$$

[23] ではこれが至る所で連続だが，任意の有理点で微分できないことが証明されて

11　明らかに，$\alpha\beta > 4$ は強過ぎる仮定である．これがどこまで弱められるのか，著者は知らない．

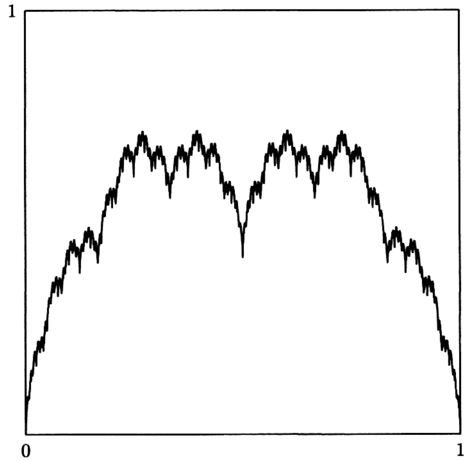


図 8.10　小平の関数 (8.13).

いる（図 8.10）．実際は無理点でも微分できないので，これは至る所微分できない関数の例になっている．

ここで高木関数の微分不可能性を証明しておこう．

定理 8.10　$a = 2, 3, \cdots$ は自然数であるとする．$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\psi(a^n x)$ は，どの $x \in [0,1]$ においても有限な微係数を持たない．特に，高木関数 $T(x)$ は，どの $x \in [0,1]$ においても有限な微係数を持たない．

証明：[464] に従って証明する．

第 1 段：自然数 N と $k = 0, 1, 2, \cdots, a^N$ で $x = k/a^N$ と表されるとき，

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{a^n}\psi(a^n x)$$

である．従って，$h > 0$ とすると，N より大きい任意の自然数 M に対して

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\psi(a^n x + a^n h) - \psi(a^n x)}{a^n h} + \frac{1}{h}\sum_{n=N}^{M} a^{-n}\psi(a^n h).$$

ゆえに

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq \sum_{n=0}^{N-1} D^+\psi(a^n x) + M - N + 1.$$

$D^+\psi(a^n x)$ の値は ± 1 のどちらかであるが，それはどちらでもよい．有限な値で

あることだけが肝要である．$M \to \infty$ とすれば，$D^+F(x) = \infty$ を得る．全く同様に $D^-F(x) = -\infty$ を得る．すなわち，

$$D^+F(x) = +\infty, \qquad D^-F(x) = -\infty$$

である．
第 2 段：それ以外の x については，次の補題を用いる．

補題 8.1 f が x_0 で微分可能ならば

$$\lim_{x\downarrow x_0, y\uparrow x_0} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x_0)$$

この補題の証明は演習問題とする．さて，任意の x を固定する．さらに，任意の自然数 N をとる．このとき $k \cdot a^{-N} < x < (k+1) \cdot a^{-N}$ を満たす非負整数 k がとれる．そこで，$x_N = k \cdot a^{-N}, y_N = (k+1) \cdot a^{-N}$ とおく．同じことを $N+1$ についても行い，x_{N+1}, y_{N+1} をとる．このとき，

$$T(x_N) = \sum_{n=0}^{N-1} a^{-n}\psi(a^{n-N}k), \qquad T(y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} a^{-n}\psi(a^{n-N}k + a^{n-N}).$$

である．ふたつの差分商

$$\frac{T(y_N) - T(x_N)}{y_N - x_N}, \qquad \frac{T(y_{N+1}) - T(x_{N+1})}{y_{N+1} - x_{N+1}}$$

を比べると，級数の和のうち $n = 0, 1, \cdots, N-1$ は同じであり $n = N$ の項のみが後者に残る．従って，

$$\left| \frac{T(y_N) - T(x_N)}{y_N - x_N} - \frac{T(y_{N+1}) - T(x_{N+1})}{y_{N+1} - x_{N+1}} \right| = 1$$

であることがわかる．これは $x_N \uparrow x, y_N \downarrow x$ のとき微分商が収束しないことを意味し，上の補題によって微係数は存在しえない．

□

以上の例とは異なる例として [323] によるものを挙げておこう．これは後に [603] によって特別な場合が再発見されている．[603] の方が簡単に説明できるので [603] に従って説明しよう．区間 $[0, 1]$ 内の数 x を三進展開する：

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots \qquad (a_j \text{ は 0,1,2 のいずれかの値をとる}).$$

これに対して $f(x)$ を次式で定義する．

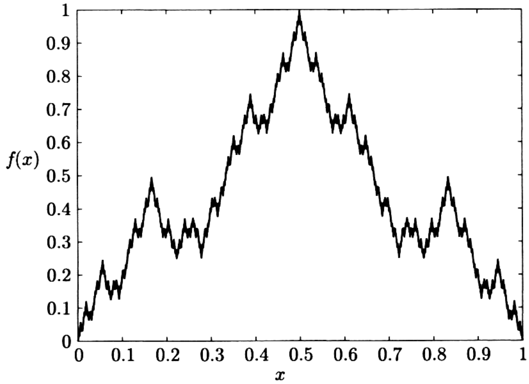


図 8.11　[323] と [603] の関数.

表 8.1　高木関数に関する論文.

1903	高木関数の発見（高木貞治）[604]
1907	ファーベルによる高木関数の類似の発見 [398]
1918	クノップによるファーベル関数と高木関数の一般化
1930	ファン・デル・ヴェルデンの関数 [614]
1933	ヒルデブラントによる高木関数の再発見 [464]
1953	マッカーシーによる高木関数の類似の発見 [520]
1957	ド・ラームによる高木関数の再発見 [360]
1984	畑と山口による高木関数の一般化 [458]
1995	フランクル，松本，ルザ，徳重による高木関数の一般化 [409]

$$f(x) = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots \qquad (b_j = 0, 1).$$

ここで $a_1 = 1$ のときに $b_1 = 1$ とし，$a_1 = 0, 2$ のときには $b_1 = 0$ とする．あとは $b_{n+1} = b_n \iff a_{n+1} = a_n$ で $\{b_k\}$ を定義する．このとき f は連続だが至る所微分できない関数である．証明は上記論文を参照してほしい．この関数のグラフを図 8.11 に記す．

高木関数にはこの他にも様々な一般化が考えられている．たとえば [409] も参照せよ．

ここで高木関数に関連する論文を一覧にしてみよう（表 8.1）．

ラグランジュの頃には関数の微分可能性は疑われることもなかったが，それから 100 年もせぬうちに微分できない連続関数という病的なものの存在は知れ渡ったのである．しかし，これは単に病的な例外なのであろうか？ 微分できない関数の存在を認めないわけにはいかなくなったが，これに対する数学者の態度は（少なくとも発見の当初は）つれないものであった．たとえば，ポアンカレは 1908 年にこの

ように語っている（[58] の 133 ページ）．

> かつては新しい函数が作られるとすれば，それは何か実用上の目的を達するためであった．今日では，人はただ先人の推理の謬まりを探し出すために殊更に作り出すのであって，これからは，このこと以外得るところは何ものもないのである．

エルミートも 1893 年に次のように述べている（[164] の第 2 巻 318 ページ）．

> 私は戦慄と恐怖をもって，至る所で微分できない連続関数というこの嘆かわしい災厄から身を遠ざけることにします．

時代がさらに下っても偏見は残っている．高木関数の発見者である高木貞治さえ『解析概論』[32] においては高木関数を継子扱いしているように思える．

このように蛇蝎のように嫌われた関数にも徐々に光が当たってくるようになるのは歴史の不思議である．微分できない連続関数は単なる厄介者であって，無視することができるならばその方がよいという態度は徐々に消えて行くことになる．物理現象の様々なモデルにはそうした関数が現れるのであり，無視することはできないのである．たとえば，ブラウン運動のほとんどすべての軌跡が連続だけれども微分できない関数になることが挙げられる．この事実は 1923 年にウィーナー[12]によって示されたものである（[271] の 39 ページ，[273]）[13]．また，現代ではフラクタル集合やフラクタル関数が物理学的にも応用があることが認識されているが，微分できないけれども連続な関数はフラクタルの代表選手であることが多い．フラクタルについては [60, 176, 143, 230] を見よ．

1931 年，マズルキェヴィッチ[14]は次の定理を示したが，これはそれまでの物の見方を 180 度ひっくり返すことになる．

定理 8.11　区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体を $C[0,1]$ とする．

$$A = \{f \in C[0,1]\ ;\ \text{すべての } x \in [0,1) \text{ において } f \text{ は右微分可能でない}\}$$

とおくと，A は第 2 カテゴリーである．

この定理の意味を知るには関数解析の知識が必要であるから，意味がちんぷんかんぷんでも案ずる必要はない．$C[0,1]$ を実数全体の成す集合になぞらえたとき，第

12 Norbert Wiener (1894-1964).

13 その証明についてはたとえば [49] を参照せよ．

14 Stefan Mazurkiewicz (1888-1945).

2カテゴリーとは，超越数のようなものである．感覚的には，「ほとんどすべての連続関数はすべての点で微分不可能であり，1点でも微分可能な点が存在する関数は圧倒的少数派である」と理解されたい．定理8.11の証明は[175, 214]を参照されたい．カテゴリーという見方に立てば，至る所微分不可能という関数が多数派なのである．カテゴリーという概念はベール[15]による．

注意 8.3(人間の感じ方) ここまで来ると人間の感じ方は時代とともに大きく変わるものだということがわかる．古代では有理数がほとんどすべてであり，無理数は存在するけれどもごく例外であるといった理解であっただろう．その後超越数が発見されたときにも例外であると見なされたが，カントールの集合論以降は超越数が圧倒的多数派であるという認識に移った．連続関数についても，当初は「微分できる関数がほとんどである」と（なんとなく）信じてられていた．しかし，ある意味では「どこでも微分できない関数」こそ多数派なのだという認識が正当化されることもある，ということは忘れてはならない．もちろん，これは考える枠組みを規定しなければ意味のない話であり，適当な枠組みでは「微分できる関数がすべてであり，微分不可能関数は考える必要はない」とすることが自然なことも多い．

連続だが微分可能でない関数の実例ははいくらでもあるのだけれども，次の例は歴史的な意義があるので少し説明することにする．

例 8.1 ボルツァーノの例（1833年頃）．ボルツァーノ[228]の487ページ．平面の2点(a,A), (b,B)を結ぶ線分が与えられたとき，この線分を次のような5点

$$(a,A),\ \left(a+\frac{3}{8}(b-a), A+\frac{5}{8}(B-A)\right),\ \left(\frac{1}{2}(b+a), \frac{1}{2}(B+A)\right),$$

$$\left(a+\frac{7}{8}(b-a), A+\frac{9}{8}(B-A)\right),\ (b,B)$$

を結んだ折れ線で置き換える（図8.12）．4本の新たな線分ができるから，それぞれの小線分に同じ操作を施す．$f_0(x)=x$ $(0 \le x \le 1)$から始めてこの操作を無限に繰り返したときにできる関数をボルツァーノ関数と呼ぶことにする．

ボルツァーノ関数は$[0,1]$で連続であり，すべての点で微分不可能であることが知られている([580])．[228, §111]([229, §75])を読めばわかることであるが，ボルツァーノ自身は至るところ微分不可能ということを考えていたわけではなく，「連続だが，どのような小区間でも単調でない関数」の例としてこれを考えていた．[228]の507-508ページ（135節）では稠密な点において微分不可能であることを指摘しているから，彼の意識は相当現代的であったと言う事ができる．この関数がすべての点で微分不可能であることが最初に証明されたのは1922年のことである

15 René Baire (1874-1932).

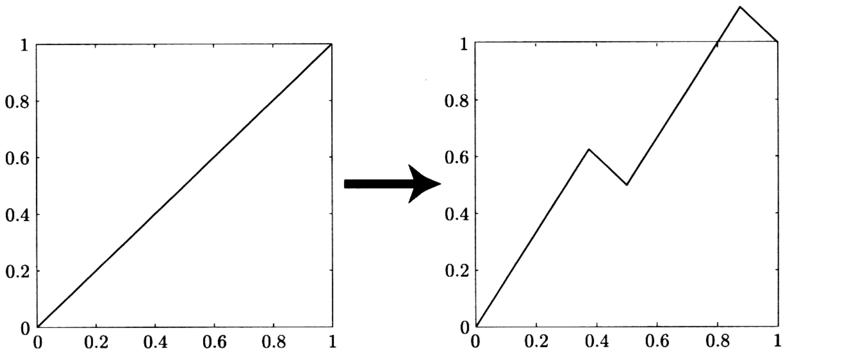


図 **8.12** ボルツァーノの操作.

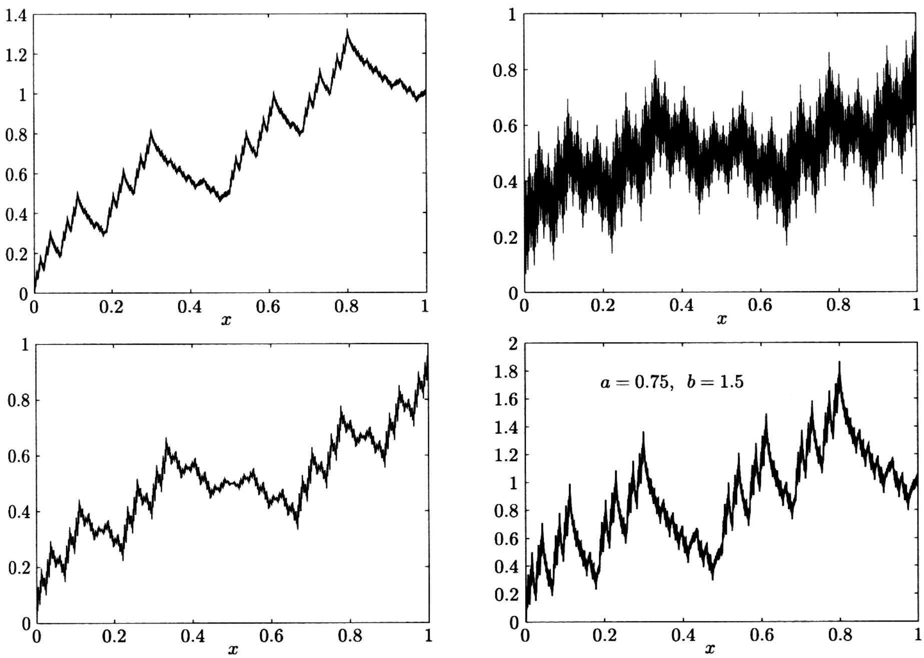


図 **8.13** 左上：ボルツァーノ関数．右上：パーキンスの関数．左下：ブルバキの関数．右下：一般化されたボルツァーノの関数 $B_{3/4,3/2}$.

という（[493] 参照）.

ボルツァーノ関数は次のように拡張することができる．まずパラメータ $a \in (0,1), b \in (0,2)$ を用意する．任意の線分 PQ（$P=(x,y), Q=(x+h,y+k)$）が与えられたとき，点 M を $M=(x+ah, y+bk)$ で定義し，線分 PQ を折れ線 PMQ に置き換える操作を Φ で表すことにしよう．任意の線分に対しそれを中点で二つ

に分け，その各々の小線分に操作 Φ を施す．この操作を $f_0(x) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$ から始めて無限に繰り返すときにできる関数を $B_{a,b}$ とする．$B_{3/4,5/4}$ がボルツァーノ関数である．$0 < b \leq 1$ ならば単調非減小であるが，$1 < b$ ならば単調性はない．

例 8.2 パーキンス [557] の例．これはボルツァーノ関数をさらに簡単化したようなもので，次のように定義できる．平面の 2 点 (a, A), (b, B) を結ぶ線分が与えられたとき，この線分を

$$(a, A), \quad \left(a + \frac{1}{3}(b-a), A + \frac{5}{6}(B-A)\right), \quad \left(a + \frac{2}{3}(b-a), A + \frac{1}{6}(B-A)\right)$$

を結んだ折れ線で置き換える．$f_0(x) = x\ (0 \leq x \leq 1)$ から始めてこの操作を無限に繰り返したときにできる関数をパーキンスの関数と呼ぶことにしよう．パーキンスはボルツァーノを参照していないから，独自に思いついたものと思われる．

例 8.3 ブルバキの例．これは [56] の第 1 章 1 節の演習問題の 2 番にある例である．これはボルツァーノ関数やパーキンス関数をさらに簡単化したようなもので，次のように定義できる．平面の 2 点 (a, A), (b, B) を結ぶ線分が与えられたとき，この線分を

$$(a, A), \left(a + \frac{1}{3}(b-a), A + \frac{2}{3}(B-A)\right), \left(a + \frac{2}{3}(b-a), A + \frac{1}{3}(B-A)\right)$$

を結んだ折れ線で置き換える．$f_0(x) = x\ (0 \leq x \leq 1)$ から始めてこの操作を無限に繰り返したときにできる関数をブルバキ関数と呼ぶことにしよう．ブルバキは何の文献も参照していないのでボルツァーノやパーキンスの研究を踏まえていたかどうかは定かでない．しかし，ボルツァーノの研究は歴史覚え書きで深く論じているから，少なくともボルツァーノは参考にしたのであろう．

パーキンスやブルバキの例を一般化した [544] の例を紹介しよう．パラメータ $a \in [0, 1)$ を選ぶ．$[0, 1]$ で定義された関数列を次のように定義する．まず，$f_0(x) = x$ と定義する．連続な折れ線関数 f_n が定義されているときに折れ線関数 f_{n+1} を次の要領で定義する．f_n が線形であるような最大の部分区間の任意のひとつ $[\xi, \eta]$ を三等分し，図 8.14 のような操作を施す．たとえば f_2 は図 8.15 のようになる．そして $F_a(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおく．この極限はすべての $x \in [0, 1]$ で存在し，$0 < a < 1$ ならば F_a が連続であることが証明できる．さらに，次の定理が成り立つ：

定理 8.12 ある $a_0 \in (1/2, 2/3)$ が存在して $0 \leq a < a_0$ ならば F_a はほとんど

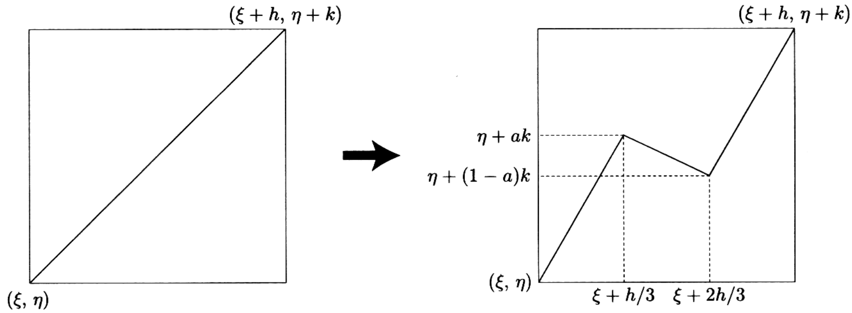


図 8.14 関数の変形.

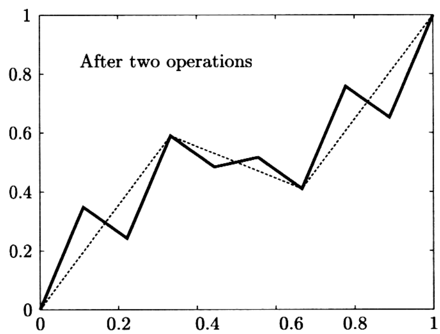


図 8.15 f_2 のグラフ. $a = 0.6$.

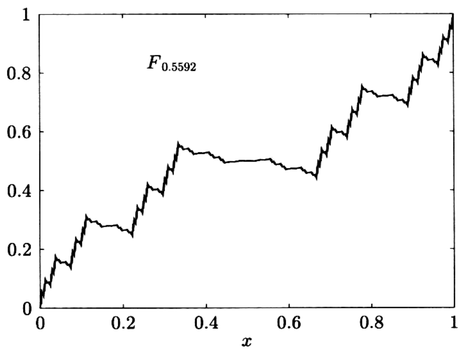


図 8.16 F_{a_0} のグラフ.

ど至るところ微分可能. $a_0 < a < 2/3$ ならばほとんど至る所微分不可能. $2/3 \leq a < 1$ ならばすべての点で微分不可能. $1/2 < a < 2/3$ のときには微分できる点の個数も無限大であり同時に微分できない点の個数も無限大である.

証明については [544] を見よ. $a = 1/3$ のときには $F_{1/3}(x) \equiv x$ となるので, つまらないが, その他の a については面白い関数を得る. $F_{5/6}$ はパーキンスの関数であり, $F_{2/3}$ はブルバキの関数である. さらに, $F_{1/2}$ はカントール関数 (図 8.17) であり, F_0 はヘビサイド関数である. $a = a_0 \approx 0.5592$ のときには, ほとんど至るところで微分不可能であることが小林健太 [489] で証明されている. 図 8.16 参照.

8.5 ベシコヴィッチ型の微分不可能関数

これまでは通常の微係数のみを考察してきた. しかし, 片側微係数を考えれば別の知見を得ることもできる. たとえば

定理 8.13 $ab > 1$ を満たすワイエルシュトラス関数をひとつ固定する．これに対して $[-1, 1]$ の稠密な集合が存在してその任意の点における右微係数が $-\infty$ となり左微係数が $+\infty$ となる．また，別の稠密な集合が存在してその任意の点で右微係数が $+\infty$ となり左微係数が $-\infty$ となる．

が成り立つ．これは [635] による結果であるが，ホブソン [165] の 404 ページにも証明がある．

高木関数も多くの点で片側微分を持つ．n が自然数で $k = 0, 1, \cdots, 2^n$ のとき $x = k/2^n$ において高木関数の片側微係数は $+\infty$ もしくは $-\infty$ になる（右微係数が $+\infty$ になるならば左微係数は $-\infty$ になり，右微係数が $-\infty$ になるならば左微係数は $+\infty$ になる）．

こういった結果を見ると，ワイエルシュトラス関数も高木関数も微分演算と完全に無関係な関数であるとは言えないことになる．では，「連続であるが至る所で右微係数も左微係数も存在しない関数は存在するのであろうか？」という疑問は自然にわいてくる．もちろんここで要求しているのは，$\pm\infty$ の片側微係数すら存在しない関数である．そのような関数の例を最初に提唱したのはベシコヴィッチ[16][308] である．これは幾何学的直感に基づいて定義されていたために，いかなる微係数も持たないことの証明が正しいかどうか，疑問の声が上がっていたようである．従ってこれが正しいかどうかに関して様々な研究がされた ([533, 556])．現在ではそうした関数の存在は認められているようであるが，これにはひとつ注意が必要である．マズルキェヴィッチの定理が示すように，連続関数の空間 $C[0, 1]$ において「至る所で右微分不可能な関数全体は第 2 カテゴリーである」が，「無限大を含むいかなる片側微係数をいかなる点でも持たないような関数全体は第 1 カテゴリーに属する」のである．道理でこうした関数の構成が難しいわけである．この著しい結果はサクスの定理と呼ばれている ([585])．

8.6 その他の話題

結局，至る所で微分できない関数はいくらでも存在することがわかったのであるが，これはまことに都合が悪い．微積分学の手法が使えない世界では，偏微分方程式が取り扱えないし，偏微分方程式が扱えないのでは数理物理学への応用は限られたものになってしまう．従って，何らかの意味で微分不可能性を克服あるいは回避

16 Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970).

する必要があるが，これを可能にしてくれるのが超関数 (distribution) の理論である．本書では超関数の歴史を綴ることはできない．[199] を参考にしてほしい．

以下の命題によって，もし f がある区間全体で連続ならば，ディーニ微係数は全くむちゃくちゃな値はとれないことがわかる．

補題 8.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であるとする．もし

$$M = \sup_{a<x<b} \overline{D}^+ f(x) < \infty$$

ならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le M.$$

証明は辻 [37] を見よ．

定理 8.14 ([634]) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ至る所で有限な微係数を持たないと仮定する．このとき，$\overline{D}^+ f$, $\underline{D}^+ f$, $\overline{D}^- f$, $\underline{D}^- f$ のどれをとってみても，$[a, b]$ の任意の開集合において上にも下にも有界でない．

定理 8.15 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は有界変動であるとする（連続性は仮定しない）．このとき，ほとんど至るところで f の微係数が存在する．

系 8.1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は単調であるとする（連続性は仮定しない）．このとき，ほとんど至るところで f の微係数が存在する．

この定理の証明は本書の内容を超えるので，以下の文献のどれかを参照してほしい：[26] の 311 ページ，[65] の 128 ページ，[66] の 96–99 ページ，[37] の 289 ページ．この系は通常，ルベーグ[17]によるものとされているが，ルベーグは連続性を仮定して証明した．連続性の仮定無しに証明したのはヤングである[18]．

系 8.2 連続だが至る所で微係数が存在しない関数はどのように小さな開区間においても単調ではない．

連続で至るところ微係数が存在し，なおかつ，いかなる開集合でも単調でない関数が存在する．こうした関数の存在を最初に示したのは 1889 年のケェプケの論文であるという．[165] を参照されたい．もっとわかりやすい例が [483] で与えられ

17 Henri Lebesgue (1875-1941).

18 ヤングを最も有名にしているのはヤングの不等式であろう．

ている．また，[175] の第3章でも詳しく解説されている．[428, 627] も参照せよ．ただし，[627] の証明は基本的なところで間違いを犯しているように思える．すべての点で微分可能というところを少し弱めて，連続でほとんど至るところ微分可能でいかなる開集合でも単調でない関数を構成することはそう難しくない．実際，8.4 節の関数 F_a で $1/2 < a < a_0$ ならばそのような例となる．

ブルックナーとレナード [320] には導関数に関する様々な性質が述べられているので一読をお勧めする．たとえば，区間 $[0,1]$ で定義された連続関数で，$[0,1]$ 上至るところ微分可能で，

- 任意の $\epsilon \in (0,1)$ に対して，測度が $1-\epsilon$ 以上の集合 S が存在して f' が S 上で不連続になるものが存在する；
- f' が可算個の点以外で不連続になるようにはできない；
- f' が稠密な集合上で不連続になるようにできる；
- $[0,1]$ の部分集合 E がある導関数の不連続点に一致するためには E は第1カテゴリーでかつ F_σ 集合であることが必要かつ十分である．

といった事柄が示されている．

定義 8.6 ルベーグの特異関数とは，単調非減少であるが，ほとんど至る所で微係数が存在してゼロとなる関数のことである．

最も有名な特異関数はカントール関数であろう（図 8.17）．これは 8.4 節の $F_{1/2}$ である．別の例は，8.4 節の一般化されたボルツァーノ関数で $b = 1$ の場合である．カントール関数が歴史上最も早く現れたのは 1884 年の彼の論文である ([331, 408])．ここで彼は微積分学の基本定理

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}s = f(a) - f(b)$$

が成り立つための条件としてハルナックが挙げた例が正しくないことの反例としてこの関数を挙げている．カントール－ルベーグ関数と呼ばれることもある．しかし，ルベーグはカントールの結果を知っていて使った訳であるから．これはいい名前だとは思わない．カントール関数と呼ぶべきであろう．

8.4 節の F_a で $0 < a < 1/2$ かつ $a \neq 1/3$ であれば特異関数になる．

定義 8.7 $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ が絶対連続[19]であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して

19 absolutely continuous. 「絶対連続」という言葉は 1905 年にヴィタリが生み出したものであるが，その概念はハルナックによる．ホーキンス [161] の 77 ページと 142 ページを見よ．

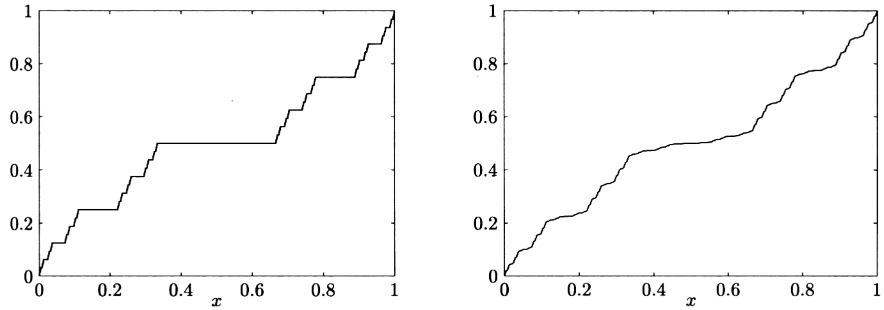


図 8.17 左：カントール関数 $F_{1/2}(x)$ のグラフ．右：$F_{0.45}$ のグラフ．

$\delta > 0$ が存在して，

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n - y_n| \leq \delta$$

ならば

$$\sum_{n=0}^{N} |f(x_n) - f(y_n)| \leq \epsilon$$

が成立することである（点 x_n, y_n は $-1 \leq x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_N \leq 1$ ととりさえすればどのようにとってもよいし，N も有限でさえあれば任意でよい）．

定理 8.16 任意の連続有界変動関数は絶対連続関数と特異関数の和として書くことができる．

証明は [65] あるいは [225] の 53 ページを見よ．

ほとんど至るところで微係数が存在してゼロとなり，しかも狭義単調増加である関数も存在する．1916 年にシェルピンスキー [593] は次の例を構成した．まず，$f(0) = 0, f(1) = 1$ と定義し，$n = 1, 2, \cdots$ と $k = 0, 1, 2, \cdots, 3^{n-1} - 1$ に対して

$$f\left(\frac{3k+1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right) + f\left(\frac{k+1}{3^{n-1}}\right) - 3^{-5n}\right], \tag{8.14}$$

$$f\left(\frac{3k+2}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right) + f\left(\frac{k+1}{3^{n-1}}\right) + 3^{-5n}\right] \tag{8.15}$$

で関数の値を $k/3^n$ なる形の数について定義する．あとは f の連続性を要請すると，一意に関数 f が定義される．もっと簡単な例が [225] の 48 ページに与えられ

ている（図 8.18）．ブラウン [317] によればこの関数を最初に発見したのはヘリンガーだということである．彼の学位論文（1907 年）にこの関数が現れているという．しかし，印刷公表されたもののうちで一番早いものはセイラム [582] のようである．他の例は [319],[175] の 67 ページを見よ．セイラムの関数は次のように定義する．$0 < a < 1$ をとる．そして，$(0,0)$, $(1/2,a)$, $(1,1)$ を結んでできる折れ線関数を $S_1(x)$ とする．次に，$0 \le x \le 1/2$ と $1/2 \le x \le 1$ の各々において同様のことをする．つまり，$(0,0),(1/4,a^2),(1/2,a)$ を結び，$(1/2,a),(3/4,2a-a^2),(1,1)$ を結ぶ．これを $S_2(x)$ とする．以下同様に折れ線関数を定義する．このとき，S_n は $0 \le x \le 1$ で一様収束することが証明できる．従って，その極限関数 $S(x)$ は連続関数となる．これがセイラムの関数である ([582])．グラフは図 8.18 のようになる．

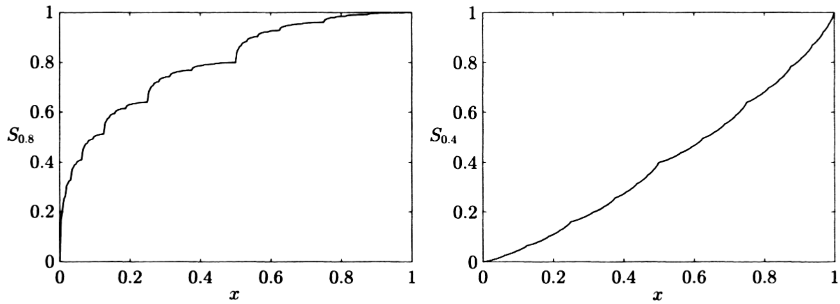


図 8.18 左：セイラムの連続かつ狭義単調増大でほとんど至るところ微分がゼロになる関数 $S_{0.8}$ のグラフ．$a = 0.8$ である．右：$S_{0.4}$ のグラフ．

8.7 原始関数

ルージン[20]は，「ある 1 変数関数 f が与えられたときに $F' = f$ がほとんど至るところで成り立つような F は存在するか？」という問題を考えた．ここで，微積分の基本定理とは無関係に $F' = f$ を考えるところと，「ほとんど至るところ」という条件を付けるところがみそである．[617] によれば，ルージンはこれを 1915 年の著書で考察した．その答えは意外なものである：

定理 8.17（ルージンの定理） f が可測でほとんど至るところ有限ならば $F' = f$ がほとんど至るところで成り立つような連続関数 F が存在する．

つまり，積分可能性とは無関係に原始関数が存在するわけである．原始関数である

20 Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950)．フーリエ級数のところで現れたルージンと同一人物である．

といってもこんなふうに拡大解釈するとほとんど何の役にも立たないように思える.

8.8 解析関数

ラグランジュにとって C^∞ 関数と解析関数の区別はつかなかったようである.ここで両者の現代的定義を振り返ってみよう.

定義 8.8 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が C^∞ 級であるとは,f のすべての階数の導関数が定義域のすべての点で存在すること.

定義 8.9 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が解析的であるとは,次の条件が満たされること:

1. f は C^∞ 級であり,
2. すべての点 $\xi\in(a,b)$ で,x に関する Taylor 級数
$$f(\xi)+\frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2+\cdots$$
の収束半径が正であり,
3. 上のテイラー級数の表す関数が収束半径の中で $f(x)$ に等しい.

(a,b) で解析的な関数の全体を $C^\omega(a,b)$ で表す.

$C^\omega\subset C^\infty$ は当然であるが,C^ω が C^∞ の真部分集合であることを最初に注意したのはコーシー([108] の 280 ページ,和訳の 196 ページ)である.彼の有名な反例

$$f(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\exp\left(-\frac{1}{x^2+\epsilon^2}\right)=\begin{cases}\exp(-1/x^2) & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

は C^∞ 級であるだけでなく,すべての点でそのテイラー級数の収束半径が正である.しかし,上の条件の 3 が満たされない.

原点の近傍で C^∞ 級の関数 f が与えられたとき,数列 $\{f^{(n)}(0)\}_{n=0}^\infty$ を考えることができる.逆に任意の実数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ が与えられたときにこの数列をテイラー係数に持つ C^∞ 級関数は存在するであろうか? いささか不思議であるが,こんなことが可能なのである.これを最初に証明したのがボレル [313] であるのでこの定理はボレル[21]の定理と呼ばれている.

21 Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956).

定理 8.18（ボレルの定理） 任意の実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が与えられたとき，原点のある近傍で定義され，すべての n について $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = a_n$ が成り立つ C^∞ 級関数 f が存在する．

ここでは [525] の証明を紹介しよう．

任意の n に対して $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数 g_n を次のように定義する：g_n は

$$g_n(x) = \begin{cases} n!a_n & (\ |x| \leq 1/(2|a_n|n!+1)\ ) \\ 0 & (\ |x| \geq 2/(2|a_n|n!+1)\ ) \end{cases}$$

を満たし，$0 < x < \infty$ で単調減少，$-\infty < x < 0$ で単調増加．

この g_n を用いて f_n を次式で定義する：

$$f_0 = g_0, \quad f_1(t) = \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s,$$
$$f_n(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \int_0^{\tau_{n-2}} \cdots \int_0^{\tau_1} g_n(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\cdots\mathrm{d}\tau_{n-1}.$$

このとき，$|f_n^{(n-1)}(t)| = |\int_0^t g_n(\tau)\mathrm{d}\tau| \leq 1$ である．これを積分すればすべての $k = 0, 1, \cdots, n-1$ に対して $|f_n^{(k)}(x)| \leq |x|^{n-k-1}/(n-k-1)!$ を得る．これによって，任意の非負整数 k に対して $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束することがわかる．特に，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は収束して C^∞ 級であることがわかる．さらに，

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,k}a_n n! = a_n n!.$$

□

ボレルの定理で保証される関数は一意ではない．f が求めるものならば，c を任意の定数としたときに $f(x) + c\exp(-1/x^2)$ がやはり同じ条件を満たすからである．

1883 年（原稿提出は 1876 年），デュ・ボア・レイモンはすべての点で C^∞ 級で，しかも，いかなる点でもテイラー級数に展開できない関数は存在するか，という問題を考えた（[369] の 111 ページ）．彼はまず，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{x^2 + 2^{-2n}} \tag{8.16}$$

を考えた．これは実数直線全体で C^∞ だが原点で解析的でない関数の例となっている．これを少しひねると $-1 < x < 1$ で C^∞ 級であり，そこで至る所解析的で

ない関数を作ることができる．

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-2^n}^{2^n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}\frac{(x-m/2^n)^{2n}}{(x-m/2^n)^2+2^{-2n}}.$$

しかしながら，彼の証明はそのままでは証明とは受け取ることができない ([583]).
彼はまた，次の例も挙げている：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}\sin nx \tag{8.17}$$

これも C^{∞} だが至る所で解析的でない関数の例となっている．これが至る所で解析的でないことを証明するのはそう難しくはない．

1893 年，プリングスハイム [565] は次の例を与えた：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(a^n x)}{n!}.$$

ここで，$a>1$ は自然数である．これが C^{∞} 級であることは明らかであろう：項別微分が可能だからである．解析的でないことを言うには次のようにすればよい．

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{a^n}}{n!}$$

とおくと $f(x)=\mathrm{Re}\left[F\left(e^{ix}\right)\right]$ である．$F(z)$ は単位円板内（$|z|<1$）で正則になることがわかる．この関数は $|z|=1$ を自然境界に持つ．つまり，$|z|=1$ となるようないかなる点 z に対してもそれを越えて解析接続できない．この事実はアダマールの有名な定理の特別な場合となる：

定理 8.19 (アダマール [440]，1892 年)
正則関数

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^{\alpha_n}$$

を考える．ここで α_n は自然数の増大列で

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}>c_0>1$$

がすべての n について成り立つものとする．このとき $\Phi(z)$ の収束円は $\Phi(z)$

の自然境界である．

証明はたとえば [227] の 322 ページを見よ．プリングスハイムとは独立に，セレリエ [343] も同じ関数を発見している．

プリングスハイムの 2 年前，ミッタグ－レフラー [529] が，フレドホルムの結果であるとして次の関数を紹介している．

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{n^2}$$

ここで，a は $|a| < 1$ なる定数で，z は単位円板を動く．$|z| < 1$ 上で C^∞ 級であるが，$|z| = 1$ の外には解析的には延長できない．ミッタグ－レフラーはこれ以上何も述べていないが，たとえば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n^2 x \qquad (-\pi < x < \pi)$$

は C^∞ 級であるが，至る所で解析的でない関数となる．そのほかの例については [583] を見よ．

最近では蒲谷と伊理 [475, 476] がある種の確率分布関数が，C^∞ であるが至る所テイラー展開できない関数であることを示している．こうした人工的と思える関数が応用面に現れてくることもあるのである．

C^∞ 関数にどのような条件が付加されると解析関数になるであろうか？ $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級で，すべての点 $\xi \in (a,b)$ においてべき級数

$$f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f'(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \cdots$$

が正の収束半径を持っても解析的ではない．しかし，$\delta > 0$ が存在して，すべての $\xi \in (a,b)$ で上のべき級数の収束半径が δ よりも大きければ解析的になる ([312])．また，ベルンシュタインによる次の定理も著名である：

定理 8.20　$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級で，すべての導関数が定符号（つまり，すべての n とすべての $x \in (a,b)$ について $f^{(n)}(x) \neq 0$）ならば解析的である．

証明はボアス（[92] の 191-192 ページ）を見よ．

次の定理は連続関数に関するマズルキェヴィッチの定理 8.11 の類似である．

定理 8.21 至るところで解析的でない C^∞ 関数は，C^∞ において第 2 カテゴリーをなす．

証明は [532] を見よ．

いわゆる病的な (pathological) 関数については [205, 619] がその歴史について論じている．また，多くの例が [101, 175] にまとめられていて便利である．どちらもよい文献であるが，[175]（特に後半）はかなり専門的である．クライン（[180] の 177 ページ）は

> ワイエルシュトラスの例（連続だが至る所で微分不可能な関数）が，解析学の発展の後期に現れてきたのは幸運であった．なぜならば，1905 年にピカールが述べているように，「連続関数が必ずしも導関数を持たないということを，もしもニュートンやライプニッツが知っていたら，微分学は創造されなかったであろう」．厳密な思考は創造への障害となり得るのである．

と述べているが，まったく同感である．

* * *

演習問題

[問題 1] ✿ アンペール [283] では関数 f の導関数を新しい方法で定義しているという ([151])．それは次のようなものであると解釈できるらしい．

> 「f も g も (a,b) 上の関数で，次の性質が満たされるものとする．$a < \alpha < \beta < b$ を満たす任意の α, β について
> $$g(\xi_1) \leq \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \leq g(\xi_2)$$
> となる ξ_1, ξ_2 が $[\alpha, \beta]$ に取れる．」

f も g も (a,b) において連続と仮定し，この条件が満たされるとき，実は f は C^1 級で，$g = f'$ であることを証明せよ．

[問題 2] ✿ トメの関数（8.2 節）が有理点で不連続となり，無理点で連続となり，リーマン可積分であることを証明せよ．

[問題 3] ✿✿ 定理 8.6 を証明せよ．

[問題 4] ✿ 補題 8.1 を証明せよ．

[問題 5] ✿ x_0 の近傍で定義された実数値関数 f が x_0 の近傍の各点で微分可能であるとする．

このとき，命題「x, y が $x \neq y$ を保ちながら独立に x_0 に収束するときの極限

$$\lim_{x,y\to x_0} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

が存在して $f'(x_0)$ に等しい」は正しくない．これに対する反例を挙げよ．f が x_0 の近傍で C^1 級ならば正しいことを証明せよ．

[問題 6] ✿✿ 高木関数はヘルダー連続であることを証明せよ．具体的には，任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して，ある定数 K が存在して

$$|T(x)-T(y)| \leq K|x-y|^\alpha$$

がすべての $x, y \in [0,1]$ について成り立つ ([590]).

[問題 7] ✿✿ 実はもう少しよい不等式が成り立つ ([458]).

$$|T(x)-T(y)| \leq K|x-y|\left\{1+\big|\log|x-y|\big|\right\}$$

がすべての $x, y \in [0,1]$ について成り立つような定数 K が存在することを示せ．

[問題 8] ✿✿✿ 高木関数の最大値が 2/3 であることを証明せよ（[279, 291, 477] 参照）.

[問題 9] ✿✿ $a > b > 1$ のとき，(8.9) で定義される関数 $F_{a,b}$ は $\alpha < \log b/\log a$ なる α について α 次ヘルダー連続であることを証明せよ．

[問題 10] ✿✿ ファーベルの関数 (8.7) あるいはマッカーシーの関数 (8.8) は連続だが，いかなる $\alpha \in (0,1)$ についてもヘルダー連続ではないことを証明せよ．

[問題 11] ✿✿✿ 関数 f を

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(a^n\pi x) \qquad (-1 \leq x \leq 1) \qquad (a>1 \text{ は自然数})$$

で定義すると，この関数は連続だが，いかなる $\alpha \in (0,1)$ についてもヘルダー連続ではないことを証明せよ ([450]).

[問題 12] ✿✿✿ $\alpha \in (0,1/2]$ とし，関数 f を

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\cos(n^2\pi x) \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

で定義すると，この三角級数は x が無理数ならば発散する ([453]).

[問題 13] ✿ (8.12) を証明せよ．アルキメデスは放物線で囲まれた領域の求積において実質的にこれを用いている．

[問題 14] ✿ 周期 1 の連続関数 η を

$$\eta(x)=\begin{cases} 2x^2 & (0 \leq x < 1/2) \\ 2(1-x)^2 & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

で定義する．そして

$$T_\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta\left(2^n x\right).$$

と定義するとき T_η は高木関数と同様の性質を持つか？

[問題 15] ✿✿ 小平の関数 (8.13) の微分不可能性を吟味せよ．

[問題 16] ✿✿ 閉区間 $[0,1]$ 内の任意の可算集合 $\{a_n\}$ が与えられたとき，$\{a_n\}$ がちょうどその不連続点の集合に一致するような単調非減少関数が存在することを例示せよ．

[問題 17] ✿✿ 閉区間 $[0,1]$ 内のすべての有理数を $\{r_1, r_2, \cdots\}$ とする．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |x - r_n|$$

は，$x = 0, 1$ を除いてすべての有理点で微分不可能であり，無理点で微分可能であることを証明せよ．

[問題 18] ✿✿ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が凸関数であるとは，すべての $x, y \in [a,b]$ とすべての $\alpha \in [0,1]$ に対して

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

が成り立つことである．f が凸ならば連続であることを証明せよ．f が凸ならば，任意の点で右微係数と左微係数が存在することを証明せよ．前問の関数が凸であることを証明せよ．

[問題 19] ✿✿ $y = f(x)$ が狭義単調増加でしかも $f'(x) = 0$ がほとんど至るところ成り立つものと仮定する．このとき逆関数 $x = g(y)$ は，$g'(y) = 1/f'(x)$ によって，ほとんど至るところで $g'(x) = +\infty$ を満たす．一方，単調増加関数 $g(x)$ はルベーグの定理によってほとんど至るところで有限な微係数を持つ．これは矛盾である．どう説明すべきか？

[問題 20] ✿ カントール関数 $F_{1/2}$ を考える．$\alpha = \log 2/\log 3$ とするときカントール関数 $F_{1/2}$ が α 次ヘルダー連続であることを証明せよ ([465])．さらに，α より大きな指数についてはヘルダー連続にならないことを証明せよ．

[問題 21] ✿✿ $F_{1/2}$ は単調であるからそのグラフの長さは有限である．しかし，$F_{1/2}$ は絶対連続ではない．従ってその長さを $\int_0^1 \sqrt{1 + F'_{1/2}(x)^2}\mathrm{d}x$ と計算することはできない．実際，ほとんど至る所 $F'_{1/2}(x) = 0$ であるからこの積分は 1 であるのに対し，その曲線の長さは 2 であることを証明せよ ([465])．

[問題 22] ✿ 一般化されたボルツァーノ関数で $b = 1$ とすると，ルベーグの特異関数となることを確かめよ．

[問題 23] ✿✿ ([128] 参照)　$s > 2$ とする．関数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} |\sin nx| \qquad (-\pi < x < \pi)$$

が，有理点で微分不可能であり，無理点で微分可能であることを証明せよ．

[問題 24] ✿ 定理 8.7 を証明せよ．

[問題 25] ✿ $a > 0$ とする．$f(0) = 0,\ f(x) = x^a \sin(1/x) \quad (0 < x < 2/\pi)$ と定義する．$0 \leq x \leq 2/\pi$ で定義されたこの関数が有界変動であるかどうか，絶対連続であるかどうか，吟味せよ．

[問題 26] ✿ $f(x) = \sqrt{|x|}$ は $x = 0$ を含む区間においてリプシッツ連続ではない．しかし，任意の有界区間において絶対連続である．これを示せ．次の包含関係において $\subset$ は等号にならないことを示せ．

リプシッツ連続関数の全体 $\subset$ 絶対連続関数の全体 $\subset$ 有界変動関数の全体
単調関数の全体 $\subset$ 有界変動関数の全体

[問題 27] ✿✿ (8.16) の関数は C^∞ であるが，原点で解析的でないことを証明せよ．

[問題 28] ✿✿ (8.17) の関数が，C^∞ であるが至る所解析的でないことを証明せよ．

[問題 29] ✿ ルージンの定理 8.17 を使って次のことを証明せよ．関数 F に対し，$F'(x)$ が存在して $F'(x) > 0$ となる x の全体を S_+ とし，$F'(x) < 0$ となる x の全体を S_- とする．S_+ も S_- もどちらも稠密でどちらも正の測度を持つ連続関数 F が存在する．

第9章　解析学のもうひとつの流れ——関数の補間と数値計算

物理学や工学の実験では有限個のデータから法則を表す関数を推測しなければならないことがある．そうした問題のひとつに補間 (interpolation)[1] の問題がある．ここではそうした問題の中から直感が裏切られるような例をいくつか考察してみよう．補間理論の解説にも様々な文献がある．著者が参考としたのは，[148, 296, 471, 522] などである．

9.1　一次補間（線形補間）

一次補間とは，関数 $f(x)$ の値が $x=a$ と $x=b$ で与えられたとき，$a<x<b$ に対する f の値を $f(a)+\frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a))$ とする方法である．線形補間と呼ばれることもある．$b-a$ があまり大きくないならばこれはそう悪い近似法ではない．これだけ原始的な方法であるから，大昔からこういう方法は使われてきた．まだ三角関数という概念すらなかった 2 千年くらい昔，プトレマイオスは 0.5 度ごとの三角関数表にあたるものを作成し，その間の値を 1/60 度ごとの線形補間で近似することができるようにしている（[54, 204]，第 I 部第 1 章）．

中国では古くから二次補間が使われているという ([30, 70])．二次関数 $y=ax^2+bx+c$ は，異なる 3 個の点 x_1, x_2, x_3 における値を指定すればひとつに定まる．言い換えれば，平面上の 3 点を指定すれば決まる．これを利用するのが二次補間であるが，具体的にどう実行するのかは様々である．

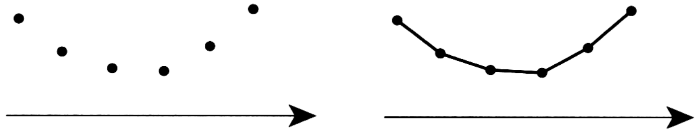


図 9.1　一次補間.

1　interpolation という言葉を最初に使ったのはウォリス (John Wallis)[266] のようである．

9.2 対数と補間

近代の数学史の立場から見ると，補間は対数計算とともに発展を開始したということができる([148])．込み入った計算をやるときには対数計算は大変重宝するものである．今でこそコンピュータの普及によって対数表は数値計算の現場から消えてしまったが，筆者らが大学生のころにはまだ対数表で量子化学の計算が教えられていた．1970 年代には電卓はあったがまだまだ高価であり，誰でも使えるというものではなかった．

$t \times s$ を計算するには $t \pm s$ に比べてはるかに多くの時間を必要とする．これを迅速に行うことができれば多くの科学者・技術者に計り知れない恩恵を施すことになる．対数はこれを可能にしたのである．そこで，「対数は天文学者の寿命を 2 倍にした」[2]という賛辞はあながち誇張ではないのである．さて，対数を使ってかけ算をするには次の手順を踏む．$b > 1$ を底とする対数 $y = \log_b x$ を考える．これは，$b^y = x$ で定義される．

1. 与えられた正数 t と s の対数を取る；$p = \log_b t$, $q = \log_b s$（この部分は対数表を利用する），
2. $r = p + q$ を計算する，
3. $r = \log_b w$ となる w を（近似的に）計算する（対数表と補間），
4. w を $t \times s$ の近似値とする．

要するに $xy = b^{\log_b x + \log_b y}$ を計算するのである．ここで，$\xi \mapsto \log_b \xi$ と $\zeta \mapsto b^\zeta$ は超越的な演算であるが，あらかじめ作られた対数表を利用すればそう時間はかからない．対数表では決まった間隔の数列 $\alpha, \alpha + \nu, \alpha + 2\nu, \alpha + 3\nu, \cdots, \alpha + N\nu$ に対する対数 $\log_b(\alpha + k\nu) \quad (0 \leq k \leq N)$ を計算し，その値を表にしておく．こうした工夫でかけ算が短時間で計算できる．もちろんこのためにはきちんとした対数表が完備されていなければならない．対数表も人間が計算して作るものであるから，対数の計算も簡単でなくてはならない．そのためにどのような底 b をとるのが便利かというと，やはり $b = 10$ とするのが便利である．こうしたことに気づいたのがブリッグス[3]である．

このときもし計算すべき値 a, b がその表の中にあればよいが，もしなかったら近似計算をせねばならない．$\alpha + k\nu < a < \alpha + (k+1)\nu$ のとき $x_0 = \log_{10}(\alpha +$

2 これはラプラスの言葉であると言われている．

3 Henry Briggs (1561-1630).

表 9.1 丸善五桁対数表の一部.

x	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77815	812	830	837	844	851	859	866	873	880
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952

$k\nu), x_1 = \log_{10}(\alpha + (k+1)\nu)$ を表から読み取ることができる．$\log_{10}(a)$ への近似値として最も単純なのは一次補間

$$x_0 + \frac{a - (\alpha + k\nu)}{\nu}(x_1 - x_0)$$

であろう．しかし，ν の値は現実にはそう小さくできないから，これでは誤差が大きくなってしまうことに昔の人々も気づいていた．だから二次以上の高精度の補間が必要とされたのである．

以上が現在知られている対数による計算のあらましである．対数はネイピア[4] [209] が発見したものとされているが，ネイピアは（原理は同様であるものの）こうした方法をとったわけではない ([289, 324]).

数学史の観点から重要なのは，ネイピアもブリッグスも対数関数の発見者ではないということである．彼らが発見したのは対数表なのである．関数ではなく，計算のアルゴリズムを発見したのである．これは [209] の冒頭の部分を読めばはっきりするであろう．

では，対数関数はいつ頃生まれたのであろうか？ $\log(-1)$ の値を巡るヨハン・ベルヌーイとライプニッツの議論（1712-1713 年）の中で対数関数は実質的に現れているはずである．また [324] によれば 1694 年にヨハン・ベルヌーイは実質的に対数関数の概念に達していたようである．文献によっては，指数関数の逆関数としての定義を最初に気づいたのはウォリス（1685 年）であるとしているのもあるが，[324] は，ウォリスはそこまで達していないと判断している．オイラーの『無限解析序説』[137] の中ではまず指数関数を定義して，その後，対数関数が次のように定義される．彼は $a > 1$ を固定する．そして

> 数値 a が与えられているとして，z の任意の値に対して，$a^z = y$ となる y の値を求めることができるのと同じように，逆に与えられた y の正の値に対して，そのような z の値が存在する．z のこの値は，y と見なす限りで，y の**対数**と呼ばれる．対数の理論は，a に置き換えられるべき定数を仮定しており，この値は，対数の**底**と呼ばれる．こ

4 John Napier (1550-1617).

> の底が仮定されるとき，y の対数とは，$a^z = y$ となるようなべき a^z の指数のことである．y の対数は ly という記号[5]で表示するのが習慣的である．$a^z = y$ であるならば，$z = \log z$ である．このことから，対数の底は，我々の選択によるものとは言え，1 より大きい数であるべきである．さらにその対数を実数で表現できるのは，正の数だけである．

従ってオイラーでは現代的な対数関数が使われているとしてよいであろう．

対数関数の歴史はカジョーリ [324] を参照せよ．

9.3 補間とは

いささか脱線してしまったが，補間の問題に戻ろう．補間の問題のうち最も簡単な問題は次のように述べることができる：

補間の基本的な問題 N 個の相異なる x 座標の値 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ と，その点における関数の値 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ が与えられた時，もとの関数 $y = f(x)$ を再現せよ．すなわちすべての $1 \leq k \leq N$ について $b_k = f(a_k)$ を満たす f を求めよ．もちろん，そのような関数は一般には無限にあるが，その中からできるだけもっともそうなものを選ぶにはどうしたらよいか？

もちろん，これが正解，と呼べるものが常にあるわけではないけれども，次のような方針でゆくのは自然であろう．すなわち，ある有限個の既知関数 $g_1, g_2, \cdots, g_N$ をとり，未定係数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ を用いて

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{N} \alpha_n g_n(x) \tag{9.1}$$

と近似するのである．ここで未定係数 α_n は

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n g_n(a_k) = b_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{9.2}$$

を要請することによって決めることにする．このとき，$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n g_n(x)$ を補間関数と呼ぶ．g_n の取り方は自由であるから，問題に応じて適当なものを選ぶ必要がある．$\{g_n\}$ として特に，$1, x, x^2, \cdots, x^{N-1}$ を採用したときには補間多項式と呼ぶ．

5　オイラーは対数を表現するとき一般にこの記法を用いている．

注意 9.1 補間の問題は様々に定式化できる ([119]). 上の問題はそのうち最も簡単なものでしかない. たとえば次のような問題も時として重要になる：$1 < k < N$ と $c_{k+1}, \cdots, c_N$ を与えたときに $1 \le j \le k$ において $f(a_j) = b_j$ となり, $k+1 \le j \le N$ において $f'(a_j) = c_j$ となる f を推定せよ. 数学的な補間理論は [119] に丁寧にまとめられているので一読をお勧めする.

9.4 ニュートン補間

ニュートン補間とは, $g_1, g_2, \cdots, g_N$ として

$$1,\ \ x-a_1,\ \ (x-a_1)(x-a_2), \cdots,\ \ (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{N-1})$$

を採用した場合の補間多項式のことである. この係数を決定するための手続きは簡単に述べることができ, それがニュートンによるものなのでニュートン補間多項式と呼ばれる. 具体的な手続きは以下のようになる.

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k) \tag{9.3}$$

とおく. ただし, $k=0$ の場合は $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k) = 1$ と見なす. (9.3) において $x = a_1$ とおくと $A_0 = f(a_1)$ を得る. (9.3) において $x = a_2$ とおくと

$$f(a_2) - f(a_1) = A_1(a_2 - a_1)$$

を得る. つまり,

$$A_1 = \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2}$$

である. (9.3) において $x = a_3$ とおくと

$$f(a_3) = f(a_1) + A_1(a_3 - a_1) + A_2(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

つまり,

$$\frac{f(a_1) - f(a_3)}{a_1 - a_3} - \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} = A_2(a_3 - a_2).$$

このようにしてすべての係数 A_j を決めることができる. ニュートンはこの公式をたいへん重要なものと認識していた.

ニュートンの補間法は [213] の book III に見られるのが印刷・公表の最初であ

ろう．しかしニュートン自身はもっとずっと以前に結果を得ていた．$\{a_n\}$ が等間隔の場合には，実はニュートンよりも数年早くグレゴリー[6]が見つけていた ([260, 359])．

この補間公式は実用的にももちろん重要であるが，歴史的な役割も大きい．すなわち，テイラーがテイラーの公式を発見した（1715年）とき，彼は，ニュートンの補間公式において $\max_j(a_{j+1}-a_j)$ をゼロに近づけることによってテイラー公式を得たのである．この発見はある意味でけがの功名である．実際，グレゴリーもニュートンも，補間公式を適用する際には $a_1 \le x \le a_N$ の範囲の x についてのみ使っていたのであって，その外側の x については何も考えていない ([359])．外側の x について使うことになれば補間 (interpolation) ではなく補外 (extrapolation) である．標本点が有限の距離を保っているならば問題はないが，テイラーがやったようにすべての標本点が1点に収束する場合には x は外側にあることになり，テイラー公式は本来の条件からはみ出たところで使われたことになる．もちろん，テイラーにはそうしたルール違反をしたという考えはなかったのであろうし，関数の定義域という観念もなかったのであろうから，形式的に極限をとったのであろう．大事なのはこうして形式的な議論をしたからこそテイラー公式は発見されたのだ，ということである．ここで，関数の定義域に拘泥していたら重要な定理の発見には到らなかったであろう．

9.5 ラグランジュ補間とルンゲ現象

定理 9.1 b_k $(1 \le k \le N)$ は任意の実数とする．a_k $(1 \le k \le N)$ は相異なる任意の実数とする．このとき (9.1) と (9.2) を満たす補間多項式がただひとつ存在する．

証明．$g_1 = 1, g_2 = x, \cdots, g_N = x^{N-1}$ とする．

$$\sum_{n=1}^{N} a_k^{n-1}\alpha_n = b_k \qquad (1 \le k \le N)$$

を満たす α_n $(1 \le n \le N)$ が一意に存在することを証明すればよい．そのためにはこの連立方程式の係数行列が正則行列であることを示せば十分である．係数行列は

6 James Gregory (1638-1675).

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{N-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{N-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_N & a_N^2 & \cdots & a_N^{N-1} \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

となる．これはヴァンデルモンド[7]の行列として知られているものであり，正則性は簡単に示される．

□

このように，補間多項式は常に存在する．しかし，その具体的な表示式で便利なものがあるかどうかは別問題である．実用上の重要性は存在と一意性だけからは生まれてこない．この意味で，ラグランジュが見い出した表示式はきわめて重要である．

[ラグランジュの補間公式]　N 個の相異なる実数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ と N 個の実数 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ が与えられた時，

$$p_{N-1}(a_j) = b_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, N)$$

を満たす $N-1$ 次補間多項式 p_{N-1} は次のように表示できる：

$$p_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\ell_j(x)}{\ell_j(a_j)}. \tag{9.5}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \ell_j(x) &= \frac{1}{(x-a_j)} \prod_{k=1}^{N} (x - a_k) \\ &= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\cdots(x-a_N) \end{aligned}$$

は $N-1$ 次多項式で，$\ell_j(a_j) \neq 0$ と $\ell_j(a_i) = 0 \quad (i \neq j)$ を満たす．(9.5) をラグランジュの補間公式と呼ぶ．(9.5) はラグランジュが 1795 年にエコールポリテクニクで行った講義録に現れている ([498])．ニュートン補間もラグランジュ補間も同じものであり，表示が違うだけである．

7 Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)．パリに生まれ，パリに死す．彼の著作の中にはこの行列式はなく，これに彼の名前を冠しているのは後世の数学者の勘違いであるとされている ([505])．本当の発見者が誰なのか，著者は知らない．

注意 9.2 ラグランジュ補間は実際にはラグランジュ以前にオイラーによって発見されていると主張している文献がたまに見受けられる．たとえば [296] がそういうことを無批判に書いている．が，これは根拠の無いものであるから注意されたい．これは元々，ブールの教科書 [95] が印刷されたときにその編者であったムールトンが，無責任なコメントをした（[95] の 39 ページ）ことによるようである．彼のコメント[8]を読むとラグランジュ補間と実質的に同じものがオイラーによってすでに発見されていたと感じるかもしれないが，事実はそうではない．そしてムールトンの無責任なコメントを後々の人々が無責任に転記するとあたかも事実であるかのように一人歩きし始めるのである．これについてはジョッフィーによる解説 [471] を参照されたい．だが，ラグランジュ補間はラグランジュが最初に発見したものではない，というのは事実である．実際イギリスの数学者ウェアリング[9]が 1779 年に発表している（[622]）からである．ラグランジュはこれを知らなかったようである．ウェアリングは初等数論で有名であるが，補間法でも重要な発見をしていたのである．

9.5.1 ラグランジュ

ラグランジュ (Joseph-Louis Lagrange) は 1736 年トリノに生まれ，1813 年パリで死去．通常彼はフランス人と思われているが，彼の曾祖父がフランス人である以外に彼にはフランス人の血は入っていないようである[10]．

彼は変分法に関する論文でオイラーに認められ，以後はスーパースターの道を歩むことになる．オイラーがベルリンアカデミーを辞めてサンクトペテルブルグに戻ったあと，ベルリンの数学主任教授になった（1766 年）のがラグランジュである．その後 1787 年にパリのアカデミーに移る．フランス革命後 1794 年にエコールポリテクニクが創設されると解析学の教授となる．皇帝ナポレオンは「ラグランジュは数理科学における高いピラミッドである」と言ったと言われ，ラグランジュを上院議員（貴族院議員）にし，伯爵の地位を与えた．しかし，彼は政治には深入りせず，ただ数学や力学の研究に没頭したと言われている ([1])．

オイラーと同様にラグランジュも数学の様々な分野で活躍した．彼の最も大きな業績は解析力学を確立したことであろう．しかし，それ以外にも業績は多い．群論の芽生えとなるアイデアを考案したことも大きな業績である ([197, 256])．一方で

---

8 しかしながら真の発見者はオイラーである．実際，オイラーは，De Eximio usu ··· doctorina (E555) と言うにおいて，この公式（ラグランジュ補間公式）と極めてよく似た公式を導いている（ムールトン）．

9 Edward Waring (1736-1798)．ウェアリングの補間公式の論文はその後歴史の中に埋もれてしまったようである．

10 彼の洗礼名は Giuseppe Lodovico Lagrangia であったし，彼はトリノの大学で教育を受けている ([1])．彼の父は投機で大損をしたために家計は相当苦しく，父親は彼を法律家にしたかったようである．しかし，彼はその後数学に目覚め，[1] によれば，「数学界は彼の父に感謝すべきであろう．というのはラグランジュは後に，もし私が裕福だったら私は多分数学者にはならなかったであろう」と述べているからである．

解析学の基礎付けには失敗し，フーリエの重要性を認識できなかったりして，晩年は輝きを失ってしまったようにも思える．

9.5.2 ルンゲ現象

ラグランジュの補間公式において $N \to \infty$ とすれば $p_{N-1}(x) \to f(x)$ を期待するのは自然である．これは正しい予想であろうか？

たとえば例として関数 $f(x) = 1/\left(1+25x^2\right)$ を考えてみよう[11]．この関数を区間 $[-1,1]$ で考え，この区間を $N-1$ 等分する：

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -1 + \frac{2}{N-1}, \quad \cdots, \quad a_N = 1.$$

これらの点におけるデータを用いてラグランジュの補間公式を作り，

$$\lim_{N\to\infty} p_{N-1}(x) = f(x) \qquad\qquad (-1 \le x \le 1)$$

であるかどうかを調べてみよう．図 9.2（左）は元の関数とその 5 点補間，10 点補間のグラフを描いたものである．10 点補間だとそこそこよい近似を与えているようにも見える．そこでさらに N を大きくして $N = 15$ としてみると図 9.2（右）となる．$x = \pm 1$ の近くで大きなずれが現れていることがわかる．このずれは N を大きくしてゆくとさらに大きくなることが知られている．実際この例の場合，ある $x_0 \in (0,1)$ が存在して，$-x_0 < x < x_0$ ならば $\lim_{N\to\infty} p_N(x) = f(x)$ となるが，$x_0 < |x| < 1$ では $\lim_{N\to\infty} p_N(x)$ が存在しないことが示されている．デイヴィス [119] や杉原 [602] を見よ．

このように，解析関数に等間隔の分点という一見もっともな条件で近似関数を

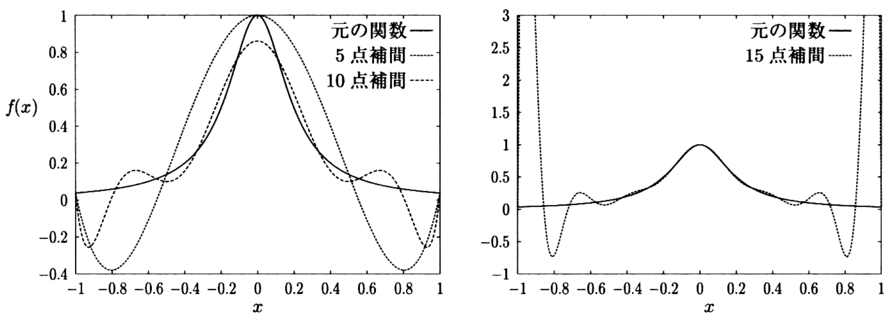


図 9.2 左：関数 $f(x) = 1/\left(1+25x^2\right)$ とその 5 点補間，10 点補間のグラフ．右：関数 $f(x) = 1/\left(1+25x^2\right)$ とその 15 点補間のグラフ．

11 係数 25 には本質的な意味はない．以下の議論は適当な条件のもとで他の係数でも成り立つ．

作成したにもかかわらず，その近似関数が実は近似とは呼べない代物であることがわかった．こうした現象をルンゲ現象と呼ぶ[12]．ラグランジュが補間公式 (9.5) を発見したのが 1795 年（印刷されたのは 1812 年），ルンゲがその収束および発散を考えたのが 1901 年．この間この事実は見過ごされてきたわけではないのだがルンゲの発見はセンセーショナルであった．実際には，メレイ[13]が 1884 年 [523] および 1896 年 [524] に発表した論文で補間多項式は必ずしも収束しないことはわかっていたのである．しかし，この二つの論文はその後にあまり影響を与えなかった．[523] が与えた例は次のものである．関数 $f(z) = 1/z$ を複素平面の単位円周上で考える．これは円周上では滑らかな関数である．これを $z_j = \exp(2\mathrm{i}j\pi/N)$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ において補間する，N 次補間多項式 $p_N(z)$ を求めてみよう．すると，

$$p_N(z) = z^{N-1}$$

が求めるものであることがわかる．しかし，$|z| = 1$ 上で p_N は f に一様収束はしない．これは

$$\int_{|z|=1} \left(z^{N-1} - \frac{1}{z} \right) \mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i}$$

から直ちに認められる．同じ論文で彼は次の等式も証明している：

$$f(z) - p_N(z) = \frac{\omega_N(z)}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(t)}{\omega_N(t)(t-z)} \mathrm{d}t \tag{9.6}$$

ここで，

$$\omega_N(t) = (t - a_1)(t - a_2) \cdots (t - a_N)$$

であり，C は $a_1, \cdots, a_N$ と x をすべて内側に含み，f が C および C の内側で解析的となるような閉路である．この表示式は大変便利であることがわかる．実際，彼は次の論文 [524] でこの公式を使って次のふたつのことを証明している．彼はまず $f(x) = 1/(1 + x^2)$ を $2N$ 個の標本点

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N, \qquad a_{-k} = -a_k \ \ (1 \leq k \leq N)$$

で補間する．$\Theta > 1$ を任意に取る．さらにすべての a_k について $0 < a_k < \Xi$ なる

12 Carl David Tolmé Runge (1856-1927)．常微分方程式の数値解法であるルンゲ-クッタ法は，彼がクッタとは独立に発見したものである．

13 Hugues Charles Robert Méray (1835-1911)．メレイはカントールやデデキントに先駆けて厳密な実数論を公表した人物としても著名である．

定数 Ξ があるものとする．このとき

$$x > \sqrt{\Theta + \Xi^2 + \Theta\Xi^2}$$

なる x では補間多項式は $N \to \infty$ としても収束しない．

彼の二つ目の結果は $f(x) = 1/(1 - x^2)$ を $a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, \cdots, a_{\pm N}$ で補間するものである．$\nu < N$ を固定し，$\nu + 1 \leq k \leq N$ に対して $a_k > \sqrt{2/3}$ とする．このとき，ν に対応してさらに N を大きくすれば，補間多項式は $x = 0$ で発散することを彼は示した．

いくつかの論文では補間多項式が必ずしも収束しないという現象をルンゲ現象とは呼ばず，ルンゲ－メレイ現象と呼んでいる．メレイの論文は二つともルンゲの論文よりも早く公表されているのであるから，ルンゲ－メレイ現象という名前もおかしくはない．しかし，メレイとルンゲの違いも忘れてはならない．メレイの 1884 年の論文は，複素領域では必ずしも補間多項式は収束しないということを示しており，これは重要な知見であるが，実関数の実多項式による補間については何も言えていないのである．また，彼の 1896 年の最初の例は，標本点が属する領域の外側では収束しない，ということであり，2 番目の例は不均一に分布した標本点に対しては必ずしも収束しないということを示しているだけである．これに対してルンゲは，実軸に特異点を持たない関数を等間隔の標本点で補間しても端点に近いところでは補間多項式が発散することを示したわけであるから，こちらの方がずっと衝撃は大きい．「補間は必ずしも収束しない」という漠然とした現象を言いたいのであればルンゲ－メレイ現象と呼んでもよいであろう．しかし，「実軸にいかなる特異点も持たない解析関数を等間隔標本点で補間しても，標本点の近くですら収束しないこともある」という精密な結果を指して言うのであればルンゲ現象と呼ぶべきであろう．

ここでルンゲの結果をもう少し詳しく紹介しよう．[578] において彼は，関数 $f(x) = 1/(1 + x^2)$ を区間 $[-5, 5]$ で考えた．そしてこの区間を等分したときの補間多項式が，

- $|x| < 3.63\cdots$ では収束し，
- $3.63\cdots < |x| < 5$ では発散する

ことを証明した．これを証明するためには，(9.6) からわかる次式を用いる．

$$f(x) - p_N(x) = \frac{\mathrm{i}\omega_N(x)}{2}\left\{\frac{1}{\omega_N(\mathrm{i})(z - \mathrm{i})} - \frac{1}{\omega_N(-\mathrm{i})(z + \mathrm{i})}\right\}$$

これより，補間多項式が収束するのは

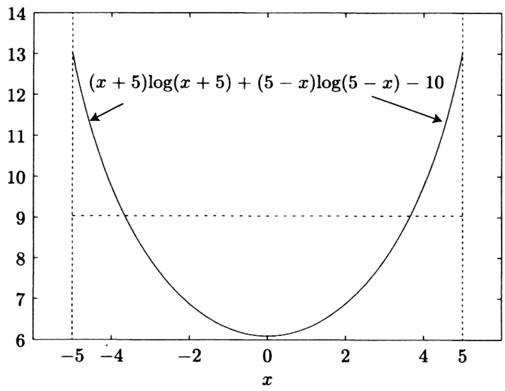


図 9.3 関数 $(x+5)\log(x+5)+(5-x)\log(5-x)-10$ のグラフと $9.037\cdots$ の位置．

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{\omega_N(x)}{\omega_N(\mathrm{i})}\right| = 0$$

を満たす x であることがわかる．容易にわかるように，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log|\omega_N(\mathrm{i})| = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5}\log|\mathrm{i}-s|\mathrm{d}s = \frac{1}{10}\int_0^5\log(1+s^2)\,\mathrm{d}s \approx 0.9037\cdots$$

i ではなく $x \in [-5,5]$ の場合はそれほど簡単ではないが，

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log|\omega_N(x)| &\le \frac{1}{10}\int_{-5}^{5}\log|x-s|\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{10}\Big[(x+5)\log(x+5)+(5-x)\log(5-x)-10\Big]\end{aligned}$$

が証明される．この右辺のグラフを描くと図 9.3 のようになる．従って，$(x+5)\log(x+5)+(5-x)\log(5-x)-10 < 9.037\cdots$ なる x で補間多項式は収束する．すなわち，$|x| < 3.633\cdots$ である．

1840 年，コーシー [338] は

$$f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\omega_N(x) \tag{9.7}$$

を示した．ここで，ξ は区間内のある点である．これを使うと誤差を見積もることができる．しかし，彼は補間多項式の収束・発散を考察したわけではない．

結局，ルンゲ現象が出てくるのは複素平面における特異点のせいであるわけだから，次の定理 ([211]) はある意味で自然である：

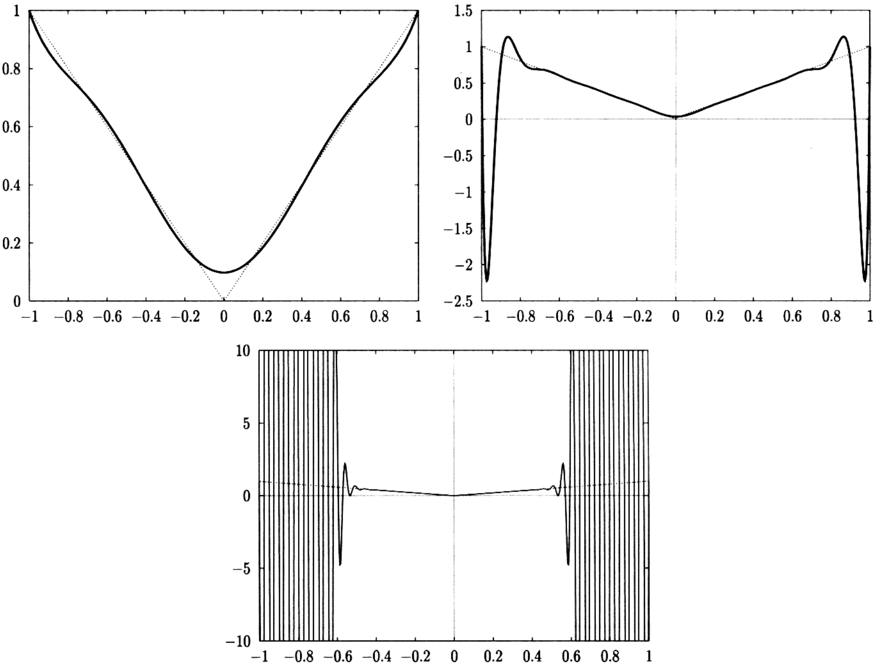


図 9.4　関数 $f(x) = |x|$ とその 8 点補間，20 点補間，80 点補間のグラフ．原点近傍でも発散するのであるが，発散はきわめて遅い．

> **定理 9.2**　もしも f が整関数ならば，つまり，複素平面全体で正則ならば，ある区間を等分する標本点を使った補間多項式はその区間で一様収束する．

関数 $f(x) = |x|$ を $-1 \le x \le 1$ で考え，ここで等間隔に標本点をとるときのラグランジュ補間関数は $x \neq \pm 1, 0$ ならば $N \to \infty$ のときに発散することも知られている．この著しい結果はベルンシュタイン [306] による．この論文は元々 1914 年に投稿されたのであるが，直後に勃発した第一次世界大戦によって連絡が取れなくなり，1918 年まで公表が延ばされたものである．その間にベルンシュタインはハルコフ大学の数学雑誌に同じものを 1916 年に発表している ([305])．これは結果的に二重投稿になっているが，彼を責めることはできない．証明については [211] を見よ．

ではルンゲ現象を避けるにはどうしたらよいだろうか？ このためには，等間隔の分点ではなく，不等間隔の分点を用いればよいことがわかっている．多くの場合にはチェビシェフ補間が有効である．チェビシェフ[14]はロシアの生んだ世界的な数

14　Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894).

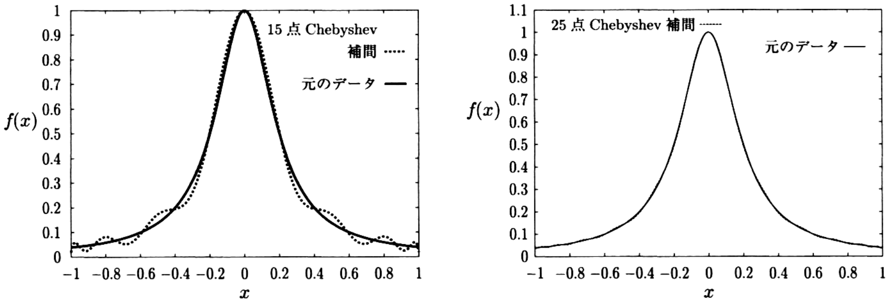


図 9.5　左：関数 $f(x) = 1/(1+25x^2)$ とその 15 点チェビシェフ補間．右：25 点チェビシェフ補間のグラフ．

学者の一人である．$[-1, 1]$ におけるラグランジュ補間で特に

$$a_j = -\cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{2N}\right) \qquad (j = 1, 2, \cdots, N)$$

ととった場合をチェビシェフ補間と呼ぶ．図 9.5 からわかるように，$N \to \infty$ のとき，すべての $x \in [-1, 1]$ について $\lim_{N\to\infty} p_N(x) = f(x)$ であることが推測される．これは実際正しい．

定理 9.3　関数 f の連続度[15]を ω とし，p_N を N 次チェビシェフ補間とすると，

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - p_N(x)| \le c\left(5 + \frac{2}{\pi}\log N\right)\omega(1/N).$$

ここで c は f にも N にも依存しない定数である．

この定理によって f がヘルダー連続ならばチェビシェフ補間関数が一様収束することがわかる．この定理の証明はたとえば [226] を見よ．[29] にはさらに高度な情報が見られる．

補間理論のその後の発展については少しマニアックになるが [250] を参照すればよいであろう．

9.6　補間と補外

補間は $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$ と $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_N)$ が与えられたときに $a_1 < x < a_N$ における $f(x)$ の値を推測する方法であると言うことができる．$x < a_1$ や $a_N < x$ については関知しないのである．これに対し，補外 (extrapolation)

15　$\delta > 0$ に対し $\omega(\delta) = \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|$ とおき，連続度と呼ぶ．

とは，$x < a_1$ や $a_N < x$ での関数の値を推測する方法である．これは一般的な言い方であるが，より特殊な問題として数値積分における補外法は重要である．

定積分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

の値がわからないとき，これを近似計算する必要が出てくる．一番簡単なのは台形公式で計算することである：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\Big\{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + 2f(a+3h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)\Big\}\ (:= I_h).$$

ここで，自然数 N をとって $h = (b-a)/N$ と定義する．右辺を I_h とおいて，I_h が $h = (b-a)/2, (b-a)/3, (b-a)/4, \cdots$ で計算可能であるとしよう．しかし $\lim_{h\downarrow 0} I_h$ はわかっていないから推測する必要がある．これが数値積分の問題で，補外法の典型的な問題の一つである．

f が十分滑らかならば

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_h\right| = O(N^{-2})$$

であることがわかっている ([59, 29, 119])．実はもっと詳しく，$f \in C^{2m+2}$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_h = \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots + \alpha_{2m} h^{2m} + O(h^{2m+2}) \qquad (9.8)$$

となる．ここで，α_j は定数である．ここで h を $h/2$ に置き換えると，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_{h/2} = \frac{1}{4}\alpha_1 h^2 + \frac{1}{16}\alpha_2 h^4 + \frac{1}{64}\alpha_3 h^6 + \cdots \qquad (9.9)$$

(9.9) に 4 をかけて (9.8) を引くと，

$$3\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \left(4I_{h/2} - I_h\right) = -\frac{3}{4}\alpha_2 h^4 + O\left(h^6\right). \qquad (9.10)$$

右辺は h^4 のオーダーになるから，$I_{h/2}$ よりも $\left(4I_{h/2} - I_h\right)/3$ の方が積分値に近いことが期待できる．$I_h, I_{h/2}, I_{h/4}$ を使うとさらに高精度な近似値として

$$\frac{64}{45}I_{h/4} - \frac{20}{45}I_{h/2} + \frac{1}{45}I_h \qquad (9.11)$$

を得る．積分 $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - 1$ を例にとって数値実験してみると表 9.2 を得る．これから明らかに精度の向上がわかる．

これはロンバーグの積分法 ([576]) として知られている方法のさわりの部分であ

表 9.2 $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$ に対する補外法. $I = e - 1$

h	$I_{h/4} - I$	$(4I_{h/2} - I_h)/3 - I$	$(9.11) - I$
0.05	2.23734×10^{-5}	3.72863×10^{-9}	1.37667×10^{-14}

るが，そのアイデアは数列の加速法と言ってもよい ([370, 572]). 実はこの方法はロンバーグよりもずっと以前から使われていた方法である. 日本でも江戸時代に円周率 π の計算を実行した関孝和やその一門が級数の加速法を用いて円周率を計算したことが知られている ([12, 17, 18]).

9.7 バースカラ I

インドのバースカラ I[16]による次の近似公式が知られている ([216, 262, 591]).

$$\sin x \approx \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)} \qquad (0 \le x \le \pi). \tag{9.12}$$

あるいは,

$$\sin \frac{\pi y}{180} \approx \frac{4y(180 - y)}{40500 - y(180 - y)} \qquad (0 \le y \le 180). \tag{9.13}$$

これは大変精度のよい近似公式である.

有理関数近似

$$\sin x \approx f(x) = \frac{x\ \text{の二次式}}{x\ \text{の二次式}} \tag{9.14}$$

で，$f(0) = 0, f'(0) = 1, f(\pi/2) = 1, f'(\pi/2) = 0, f(\pi/6) = 1/2$ となるものを求めてみよう. 結果は

$$f(x) = \frac{x(\pi^2 + (16 - 6\pi)x)}{\pi^2 + (\pi - 4)\pi x + (20 - 6\pi)x^2} \tag{9.15}$$

(9.12) と (9.15) を比べてみよう. 図 9.6 からわかるように，$0 < x < \pi/6$ では (9.15) の方がよい近似であるが，$0 < x < \pi/2$ における誤差の最大値は (9.12) の方が小さい. ただし，相対誤差 $\frac{|\sin x - f(x)|}{|\sin x|}$ で見ると，x が小さいときは (9.15) の方がよい.

ただ，(9.15) には自然数と π が混在しており，古代の人は π の値を素早く計算できたわけではないから，このままでは古代の人々には使いにくい. この欠点をなくすには $\pi \approx 22/7$ を用いて係数から自然数あるいは π を追放すればよい. 結果は

16 Bhāskara I (600AD?-680AD?) 12 世紀にも同じ名前の数学者が現れるので，7 世紀のバースカラには I を，12 世紀のバースカラには II を付けて区別する.

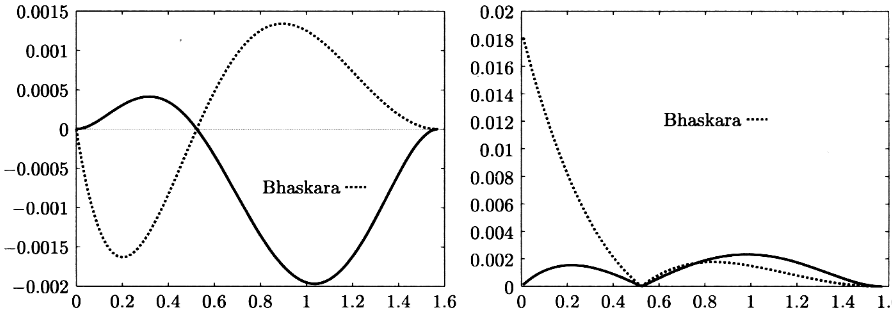


図 9.6 左：$\sin x - f(x)$ の $0 < x < \pi/2$ における絶対誤差．右：同相対誤差．破線はバースカラ I のもの (9.12)．実線は (9.15)．

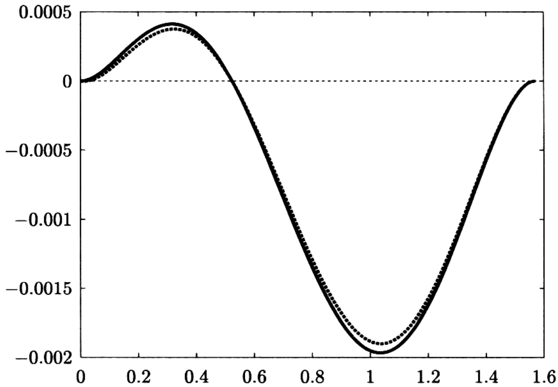


図 9.7 破線は (9.16)，実線は (9.15) のもの．

$$f(x) = \frac{22\pi x - 20x^2}{7\pi^2 - 6\pi x + 8x^2}. \tag{9.16}$$

グラフに書いてみるとわかるように (9.15) よりも若干よくなっている（図 9.7）．

では 7 世紀の昔に，バースカラ I はどのようにして彼の補間公式を導いたのであろうか？ 彼は導出方法について何も述べていないのでよくわからない．ただ，いろいろと学説はある ([438, 460])．

彼の公式は $x = 0$ でゼロとなり，$x = \pi/6$ で $1/2$ となり，$x = \pi/2$ で 1 となり，$x = \pi/2$ で最大値をとる．有理数近似

$$\frac{cx + dx^2}{1 + ax + bx^2}$$

において，これらの 4 条件を満たすようにすると，

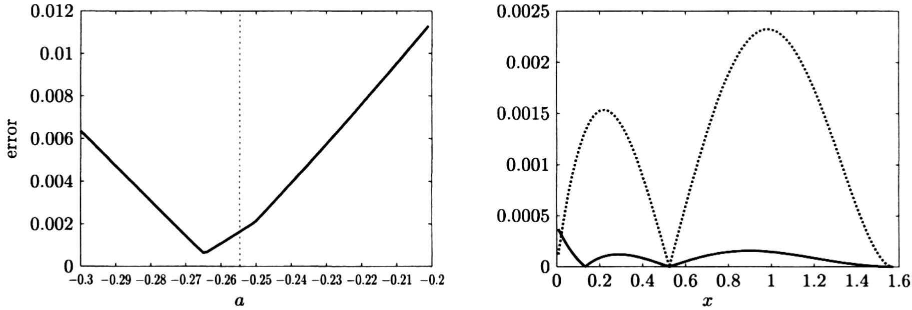


図 9.8 左：$-0.3 \le a \le -0,2$ における最大値誤差．縦の破線がバースカラ I の公式に対応する．右：相対誤差．実線が (9.17) のもの．破線は (9.15).

$$f(a,x) = \frac{\frac{4+\pi a}{\pi}x - \frac{8+6\pi a}{\pi^2}x^2}{1+ax-\frac{4+6\pi a}{\pi^2}x^2}$$

を得る．$a = -4/(5\pi) \approx -0.256\cdots$ がバースカラ I の公式である．これは，$f(a,x) = f(a,\pi - x)$ を満たすことと同値であることがわかる．従って，(9.14) の形の近似式で，$x = 0, \pi/6, \pi/2$ で正しい値をとり，$\pi/2$ で最大値をとり，$\pi/2$ に関して対称である，という条件としてバースカラ I の公式が特徴付けられる．

次に，

$$\min_{a} \max_{0\le x\le\pi/2} |\sin x - f(a,x)|$$

というミニマックス問題を考えよう．これはバースカラの値で達成されるであろうか？ 答えはノーである．$-0.3 \le a \le -0.2$ で最大値誤差をプロットすると，最小値は $a = -0.265$ あたりで達成される（図 9.8 左)．だからバースカラの公式はベストではない．しかし，かなりベストに近い．

バースカラ I の公式では $f'(0) = 1$ を使っていない（微分も曲線の傾きも無かった時代だから使えない)．しかし，

$$\frac{ax+bx^2}{1+cx+dx^2+px^3+qx^4}$$

の形の有理近似ならば，

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f(\pi/6) = 1/2, \quad f(\pi/2) = 1, \quad f'(\pi/2) = 0$$

でなおかつ $x = \pi/2$ について対称であるようにできる．結果は，

$$f(x) = \frac{\pi^2 - 4x^2}{\pi^2 + Ax^2 + Bx^4}$$

となる．ここで，

$$y = \frac{\pi}{2} - x, \qquad A = \frac{25\pi - 64}{5\pi}, \quad B = \frac{36(16 - 5\pi)}{5\pi^3}$$

である．ラジアンではなく度数にしたとき π が出ないようにするには，$\pi \approx 22/7$ を使って π を消したりすればよい．結果は

$$f(x) = \frac{\pi^2 - 4x^2}{\pi^2 + \frac{51}{55}x^2 + \frac{36}{55\pi^2}x^4}. \tag{9.17}$$

この誤差を比べてみると，ある程度改善されることがわかる（図 9.8 右）．

9.7.1 退化

バースカラ I あるいはほぼ同時代のブラフマグプタらが，(9.12) を正しい式ととらえていたのか，それとも近似式でしかない，という認識だったのかはわからない．しかし，12 世紀のバースカラ II になるとこれが近似式であるということは認識していたようである ([438])．

文明が進むと科学も進むというのは必ずしも真ではない．インドでも 1520 年にガネーシャ[17]によって書かれた *Grahalāghava* という書物には，

$$\sin x \approx \frac{16x(\pi - x)}{\frac{224}{45}\pi^2 - 4x(\pi - x)} \qquad (0 \le x \le \pi) \tag{9.18}$$

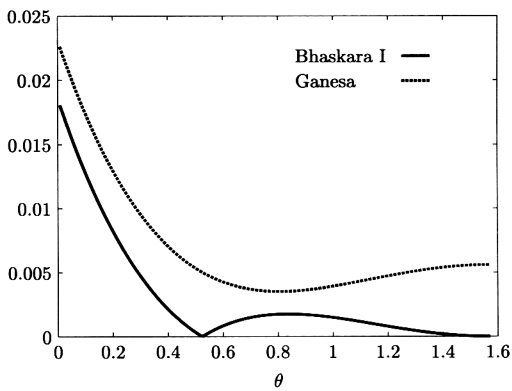


図 9.9 バースカラ I の公式とガネーシャの公式の相対誤差を比較したもの．

17 Ganeśa Daivajña.

が $\sin x$ の近似式として与えられている．図 9.9 からわかるように誤差はかなり大きくなっている．

9.8　九章算術

九章算術は現在まで伝わってきた中国の数学書の中で，周髀算経に次いで古いものである．それは前漢後期から後漢の前期までの間に書かれたものと言われている ([30, 70])．数学書と言っても問題と答えが書いてあるだけであるから，理論書というよりは問題集である．その方田の章の問題 35 と 36 は弧田の面積を求めるものである．問題 36 の原文は，

> 方田：又有弧田，弦七十八歩，二分歩之一，矢十三歩，九分歩之七．問為田幾何？
> 答曰：二畝一百五十五歩，八十一分歩之五十六．
> 術曰：以弦乗矢，矢又自乗，并之，二而一．

図 9.10 のような円弧と弦で囲まれた図形（弧田と呼ばれる）の面積が問題となる（[70] の 62 ページ，[30] の 46 ページ）．弦 AB の長さを a とし，弧田の高さを h とする．上の文で弦とあるのは a のことで，矢とは h のことである．九章算術の答えは

$$\tilde{S} = \frac{ah + h^2}{2} \tag{9.19}$$

である．これは近似式にしか過ぎない．正しくないせいかどうか，[30] でも [70] でも素っ気ない扱いである．他の章の内容が結構高度なので見劣りするのは仕方がないが，そもそも超越関数を近似しようというのであれば難しいのは当然である．応用家としてはしかし，どれくらい近似度がよいのか，ということが問題であろう．これについてまじめに考えた人が見あたらないのは不思議であるが，本節で少し近似度について考えてみたい．

まず，近似公式 (9.19) をどう解釈すべきかについて [30] も [70] も述べてはいない．[234] ではこれを上底 h 下底 a 高さ h の台形の面積と解釈し，弧田を近似しているものとしている．つまり，$S' = (a+h)h/2$ というわけである．これはつじつまが合っているようにも思えるが，それならばどうしてそう書かずに，「a と h をかけよ．その結果に h の自乗を加えて最後に 2 で割れ」という答えになっているのであろうか．実際，九章算術の方田の章の第 30 問には台形の田の面積公式を $(a+h)h/2$ としており，$(ah+h^2)/2$ とはしていない．多少腑に落ちないところで

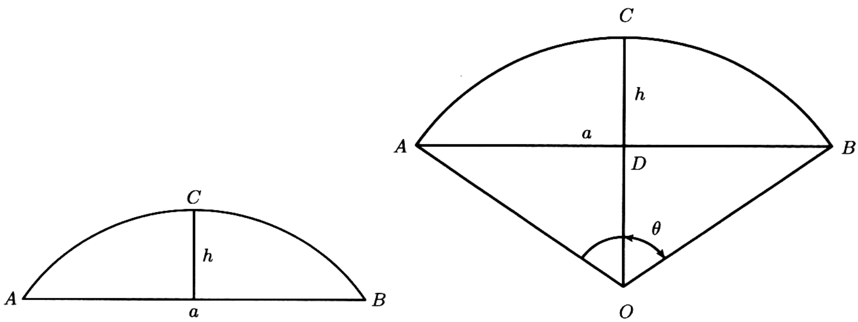


図 9.10　左図：弧田．図の弧 ABC において C は中点を表す．弦 AB の長さが a である．右図：θ の定義．

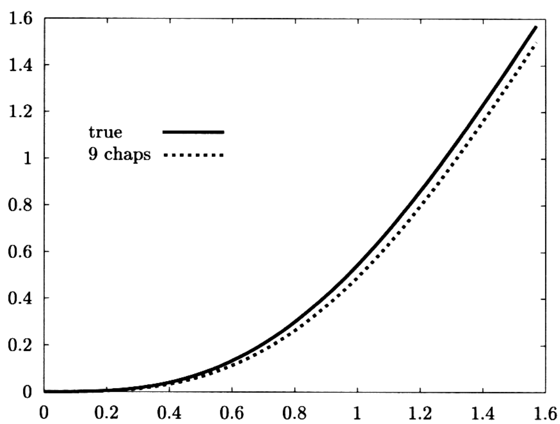


図 9.11　面積の真の値（実線）と九章算術の公式（破線）．$r = 1$ である．横軸は $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

ある．

さて，現代的な記号を用いて正しい面積を導いてみよう．今，図 9.10 の右図のように，円の中心を O として図のような角度 θ を導入する．円の半径を r とすれば，$a = 2r\sin\theta, h = r - r\cos\theta$ であり，

$$S = r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta).$$

一方，九章算術の公式は

$$\tilde{S} = \frac{r^2}{2}(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta + 2\sin\theta)$$

である．$0 < \theta < \pi/2$ で両者のグラフを書いてみると，図 9.11 となる．それほど悪い公式ではない．ただし，半円に近いところでは近似はよくない．

9.8.1　別の見方

$r=1$ に固定しよう．このとき，$a=2\sqrt{2h-h^2}$, $h=1-\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$ であるから，面積は h のみの関数あるいは a のみの関数と見なすことができる．このとき，

$$\begin{aligned}S &= \sin^{-1}\left(\sqrt{2h-h^2}\right)-\sqrt{2h-h^2}(1-h) \qquad (0<h<1),\\ &= \sin^{-1}\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{4-a^2}}{4} \qquad (0<a<2),\\ \tilde{S} &= \frac{h}{2}\left(2\sqrt{2h-h^2}+h\right) \qquad (0<h<1),\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}\right)\left(a+1-\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}\right) \qquad (0<a<2).\end{aligned}$$

しかしながら，a のみ，あるいは，h のみで表すのは得策ではない．$\sin^{-1}x$ は $x=1$ で特異点を持つから，それを a のみの多項式で近似しようとしても無理である．一方，h のみを使うと $\sin^{-1}x$ の $x=0$ の近くでの近似が悪くなる．a も h も用いる必要があることがわかる．

九章算術の公式はつまるところ，

$$\sin^{-1}\frac{a}{2}\approx\frac{a}{2}+\frac{h^2}{2},$$

あるいは同じことであるが，$a=2x$ とすれば，

$$\sin^{-1}x\approx x+\frac{1}{2}h^2=1+x-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1-x^2} \qquad (0<x<1)$$

としているわけである．

9.8.2　もう少し

では，$\sin^{-1}x\approx x+\frac{1}{2}h^2$ はどれくらい改良できるのであろう？ $x=0$ の近傍では非常に近似がよく，$x=1$ において $\frac{1}{2}\pi-\frac{3}{2}$ の誤差が出ているわけであるから，定数 c をとって

$$\sin^{-1}x-\frac{1}{2}h^2\approx x+cx^3$$

で近似し，両者が $x=1$ で等しくなるように選んでみる．

$$c=\frac{\pi-3}{2}$$

であるが，π の正確な値は使えない．そこで，$\pi\approx 22/7$ を使って

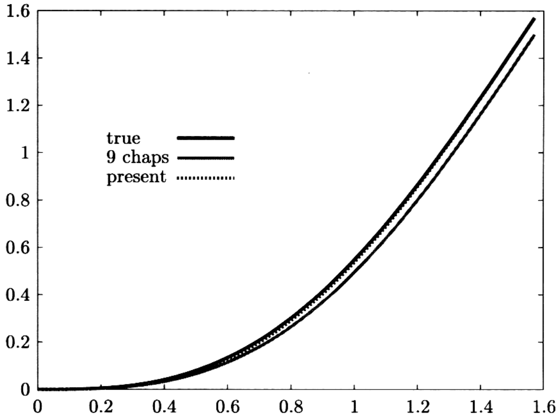


図 9.12 (9.20) の値（破線）は真の値にかなり近くなる．誤差の最大値は $\theta \approx 51^\circ$ あたりで起きるが，その値は 0.01 ほどであり，相対誤差で見ても 2% 程度である．

$$\sin^{-1} x - \frac{1}{2}h^2 \approx x + \frac{1}{14}x^3$$

として見るのは妥当であろう．あるいは同じことであるが，

$$\theta - \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2 \approx \sin\theta + \frac{1}{14}\sin^3\theta$$

あるいは，

$$\tilde{\tilde{S}} \approx \frac{h(a+h)}{2} + \frac{a^3}{112} \tag{9.20}$$

である．こうするとかなり近似はよくなる．図 9.12 を見るとかなり改善していることがわかる．

9.8.3 アレキサンドリアのヘロン

1 世紀頃の人であると言われているヘロンは応用技術から数学まで様々な貢献を成し遂げた人物である ([163])．彼の残した多くの著作のうち，『測量術』には有名なヘロンの公式がある．すなわち，三角形の三辺の長さを a, b, c としたとき，三角形の面積 S が，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

で与えられる，という公式である．彼はメトリカの中で「古代人は円の一部の面積を与える公式として $(a+h)h/2$ を与えているが，これはあまり精度はよくない」

としている[18]．ここで，円の一部というのは九章算術でいう弧田のことである．このことから見て，九章算術の弧田の問題およびその近似解は，東洋と西洋の両方において相当昔から知られていたようである．

ヘロンは精度を上げるためにいくつかの改良公式を提案している．たとえば，

$$S \approx \frac{(a+h)h}{2} + \frac{1}{14}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

がある．ヘロンはこれを $3h > a$ の時に使うよう推奨している．$3h < a$ のときには

$$S \approx \frac{2}{3}ah$$

を勧めている．これは円弧を放物線で近似しているのと同値である．いずれの近似も決していいとは言えないので，理論的に導いたものではなく，試行錯誤の上で見つけたものと推測する．

9.9 円弧

円弧の長さを弦と矢で表そうという試みは 11 世紀の中国の科学者沈活に見られる ([30, 70])．それは，図 9.10 において

$$弧の長さ \approx a + \frac{h^2}{r}$$

とするもので，あまり精度がいいとは言えない．

弦で近似しても誤差は大きい．しかし，ちょっとした工夫で精度を上げることができる．[370] にしたがっていくつかの興味ある例を挙げてみよう．図 9.10 の左図において，線分 AB の長さを a とし，線分 CB の長さを b としたとき，円弧 ACB の長さ L を，

$$L \approx \frac{8b-a}{3}$$

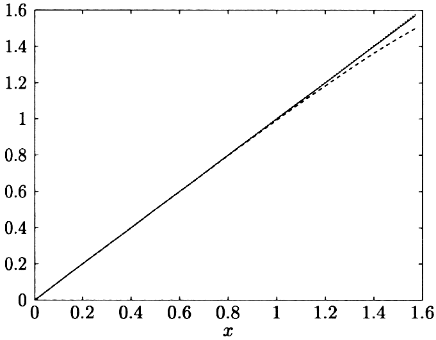
と近似する．ホイヘンス[19]はこの近似式を 1654 年に見いだしている ([370, 528])．この公式は θ が小さいときには大変精度がよい．この公式は

$$\theta \approx \frac{8}{3}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3}\sin\theta \qquad (0 \le \theta \le \pi/2)$$

と書くことができる．この係数の選び方は，右辺を θ についてテイラー展開した

18 ヒース [163] の第 2 巻．

19 Christiaan Huygens (1629-1695)．ホイヘンスの伝記として [72] を挙げておく．



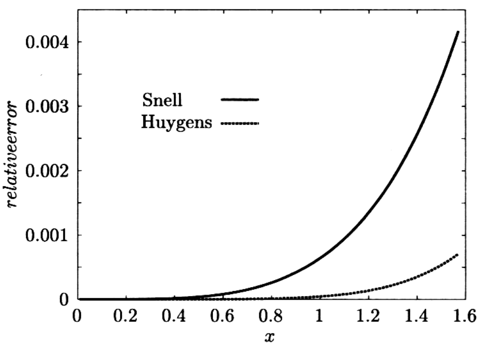


図 9.13 左：スネルの近似式．上限はかなり $y = x$ に近いので差がほとんど見えない．右：スネルの上限の式とホイヘンスの上限の式による相対誤差．

ときに $\theta + O(\theta^5)$ $(\theta \to 0)$ となるように選ぶことと同値である．相対誤差は一番大きな $\theta = \pi/2$ において 1.178% である．ホイヘンスは

$$\operatorname{crd} x + \frac{\operatorname{crd} x - \sin x}{3} < x < \operatorname{crd} x + \frac{\operatorname{crd} x - \sin x}{3} \cdot \frac{4\operatorname{crd} x + \sin x}{2\operatorname{crd} x + 3\sin x}$$
$$(\operatorname{crd} x = 2\sin(x/2))\,.$$

という不等式を導いており，これの下限が上の公式にあたる．この上限にあたる公式はより複雑となるが，誤差はずっと小さい．ホイヘンスに先立ち，スネル[20]が1621 年に

$$\frac{3\sin x}{2 + \cos x} < x < 2\sin\frac{x}{3} + \tan\frac{x}{3}$$

を導いているという ([370])．これも上限の方が加減よりも誤差が小さい（図 9.13 左）が，相対誤差で比べてみるとホイヘンスの公式はかなりの改善となっていることがわかる（図 9.13 右）．

次に，さらに精度を上げる工夫を紹介しよう．

$$L \approx \frac{256c - 40b + a}{45} \tag{9.21}$$

とするとさらに高次の近似式を得る．ここで，c は，円弧 CB の中点と B を結んでできる線分の長さである．(9.21) は右辺を θ で書き表してテイラー展開したときに $\theta + O(\theta^7)$ となるように選ぶことと同値である．この公式 ([528]) は

$$\theta \approx \frac{1}{45}\left(256\sin\frac{\theta}{4} - 40\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta\right) \tag{9.22}$$

20 Willebrord van Royen Snell (1580-1626)．入射角と屈折角の法則でも名高い．

と書くことができ，大変精度がよい．相対誤差の最大値は $\theta = \pi/2$ で発生するが，それでも 4.45×10^{-5} 程度である．

9.10 ワイエルシュトラスの多項式近似定理，ベルンシュタイン多項式

前章で見たように連続関数の中には微分が全くできないものもある．また，多項式補間は収束しないこともある．従って，「連続関数を多項式で一様に近似できるのであろうか？」という問題は決して自明なものではない．この問題をもう少し数学的に，次のように定式化してみよう：

多項式による近似の可能性？ 区間 $[0,1]$ で定義され，そこで連続な関数 f と，任意の $\epsilon > 0$ が与えられているものとする．このとき実数係数多項式 p で

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

がすべての $x \in [0,1]$ について成り立つものが存在するか？

$p(x)$ は補間多項式である必要はない．何でもいいから存在するか，と問うているのである．答えは YES である．これを最初に証明したのがワイエルシュトラスであったのでワイエルシュトラスの定理と呼ばれている[21]．証明にはいくつかの方法が知られているが，ここではベルンシュタイン多項式を用いた証明 ([307]) を与える[22]．

定理 9.4 (ベルンシュタインの定理) f を $[0,1]$ 上の連続関数とし，N を自然数とする．そして

$$B_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} f\left(\frac{k}{N}\right) x^k (1-x)^{N-k} \tag{9.23}$$

と定義する．ここで，$\binom{N}{k}$ は 2 項係数である：$\binom{N}{k} = \dfrac{N!}{k!(N-k)!}$．このとき

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\le x\le 1} |f(x) - B_N(x)| = 0.$$

21 ワイエルシュトラスはいくつもの有名な定理を証明しているのでこの定理はワイエルシュトラスの多項式近似定理あるいはワイエルシュトラスの近似定理と呼ばれている．1885 年のことである ([625])．

22 Sergi Natanovich Bernstein (1880–1968)．定理 8.20 を発見したり，$|x|$ の補間多項式が発散する（図 9.4）ことを示した．ベルンシュタインもロシアの誇る数学者である．

証明．[第1段]． 特殊な場合，$f(x) \equiv 1$，$f(x) = x$，$f(x) = x^2$，に B_N を具体的に計算する．自明な等式

$$1 = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}$$

にまず注意しよう．これは $f(x) \equiv 1$ については $B_N \equiv f$ であることを意味する．次に，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{k}{N} x^k (1-x)^{N-k} &= \sum_{k=1}^{N} \binom{N-1}{k-1} x^k (1-x)^{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{N-1-k} = x.\end{aligned}$$

を計算で確かめる．これは $f(x) = x$ についても $B_N \equiv f$ であることを示す．$f(x) = x^2$ のときにはもう少し計算を必要とするが，全く同じようにして

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{k^2}{N^2} x^k (1-x)^{N-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{N} \tag{9.24}$$

を示すことができる．これらを用いると

$$\sum_{k=0}^{N} (k - Nx)^2 \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k} = Nx(1-x)$$

がわかる．

[第2段]． f は $[0,1]$ で一様連続であるから，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$|x-y| < \delta$ を満たすすべての $x, y \in [0,1]$ に対して $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} f(x)\, x^k (1-x)^{N-k}$$

に注意する．これと (9.23) から，

$$
\begin{aligned}
|f(x)-B_N(x)| \le & \sum_{|x-k/N|<\delta} \binom{N}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{N}\right) \right| x^k (1-x)^{N-k} \\
& + \sum_{|x-k/N|\ge\delta} \binom{N}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{N}\right) \right| x^k (1-x)^{N-k} \\
\equiv & S_1 + S_2.
\end{aligned}
$$

S_1 の評価は易しい：

$$
|S_1| \le \epsilon \sum_{|x-k/N|<\delta} \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k} \le \epsilon.
$$

第 1 段の結果を用いると，

$$
\begin{aligned}
|S_2| &\le 2 \max_{0\le x\le 1} |f(x)| \frac{1}{\delta^2} \sum_{|x-k/N|\ge\delta} \frac{(Nx-k)^2}{N^2} \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k} \\
&\le 2 \max_{0\le x\le 1} |f(x)| \frac{1}{\delta^2 N^2} Nx(1-x) \to 0 \qquad (N \to \infty).
\end{aligned}
$$

□

定義 9.1　(9.23) を f に対するベルンシュタイン多項式と呼ぶ．ベルンシュタインの原論文は [307] である．

ワイエルシュトラスの近似定理の一般化であるストーン－ワイエルシュトラスの定理というものがある．これについては [119] を見よ．以上は実数値関数の近似理論である．複素平面内の領域で近似理論を考えると全く様相は異なる．実際，正則関数が一様収束すれば収束先も正則であるから，多項式近似できる関数は正則関数に限られるわけである．こうした話題については [119] や [146] を参照せよ．

9.11　ワイエルシュトラスの定理の精密化等．掛谷の定理

ワイエルシュトラスの近似定理を精密化，あるいは一般化する試みがいろいろとなされてきたので，それについてふれておこう．まず，多項式の中で適当な項を落としたものだけで近似することができる．たとえば 1 次の項が無い多項式 $p = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_Nx^N$ などのような形の多項式だけでも近似は可能である．最も一般の形としては

定理 9.5 (ミュンツの定理（の特殊な場合))　自然数の無限列 $0 < n_1 < n_2 <$

$\cdots$ が

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$$

となるならば，$[0,1]$ 上の任意の連続関数が $p = a_0 + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \cdots + a_{n_N} x^{n_N}$ という形の多項式によって，一様に近似できる．

この定理はその逆も成り立つことがわかっている．証明は [119] を見よ．

ワイエルシュトラスの定理やミュンツの定理では係数は任意の実数をとることができた，もし係数に制限を加えると話は難しくなる．たとえば，整数係数の多項式だけに制限して考えるともはや近似定理は成り立たない．整数係数多項式 p においては $p(0)$ と $p(1)$ は常に整数であるから，たとえば $f(0) = 0.5$ を満たす連続関数は決して近似されることはない．だから，次の定理はある種の不思議な雰囲気を持っている．

定理 9.6 (掛谷の近似定理) $[-1,1]$ 上の連続関数 f が $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$ を満たすものとする．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対してある**整数係数**多項式 p で

$$\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

となるものが存在する．

系 9.1 $[0,1]$ 上の連続関数 f が $f(0)$ も $f(1)$ も整数であるとする．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対してある**整数係数**多項式 p で

$$\max_{0 \le x \le 1} |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

を満たすものが存在する．

掛谷の定理 9.6 から系 9.1 を導くのは易しい．

$$g(x) = f(x) - \{f(1) - f(0)\}\, x - f(0)$$

とおくと，$g(0) = g(1) = 0$ となる．$f(1) - f(0)$ も $f(0)$ も整数であるから，g が整数係数多項式で近似できることを示せば十分である．g を $-1 \le x \le 0$ において $g(-x) = g(x)$ として拡張すればこれも連続で，$g(-1) = g(0) = g(1) = 0$ を満たす．ゆえに掛谷の定理によって整係数多項式で近似できる．一方，定理 9.6 を証明

するのはそれほど簡単ではない.

ベルンシュタイン多項式を使うと系 9.1 を簡単に証明できる. $[0,1]$ 上の連続関数 f が与えられたものとする. ベルンシュタイン多項式 (9.23) を使って次のように変形する. 以下, 実数 x に対して x 以下の整数で最大のものを $\lfloor x \rfloor$ で表すことにする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し N を十分大きく取ると,

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \left\lfloor \binom{N}{k} f\left(\frac{k}{N}\right) \right\rfloor x^k (1-x)^{N-k} \right| \\
&\qquad \le |f(x) - B_N(x)| \\
&\qquad\quad + \left| \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \binom{N}{k} f\left(\frac{k}{N}\right) - \left\lfloor \binom{N}{k} f\left(\frac{k}{N}\right) \right\rfloor \right\} x^k (1-x)^{N-k} \right| \\
&\qquad \le \epsilon + \sum_{k=1}^{N-1} x^k (1-x)^{N-k} \\
&\qquad \le \epsilon + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k} \le \epsilon + \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

□

掛谷宗一は彼の近似定理 9.6 を示した論文の中で同様の近似定理は区間 $[-2,2]$ では成り立たないことを示した. つまり, 区間 $[-2,2]$ で定義された連続関数 f が $f(0) = f(\pm 1) = f(\pm 2) = 0$ を満たし, 整数係数の多項式でいくらでも近似できるならば, f そのものが多項式であることを示した. その後, 岡田 [543] により, $0 < a < 2$ に対して, 区間 $[-a,a]$ で同様の問題が考えられた. 最新の結果については [198] の 2.4 節を見よ.

掛谷宗一には多くの業績があるので, 掛谷の定理は他にもある. 掛谷の定理として最も有名なものは正数係数の代数方程式の根の限界についてのものであろう:

定理 9.7 (正係数多項式に関するエーネストレム－掛谷の定理) 実数係数の多項式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_N z^N$$

において, $0 < a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_N$ と仮定する.

$$\alpha = \min\left\{ \frac{a_{N-1}}{a_N}, \frac{a_{N-2}}{a_{N-1}}, \cdots, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_1} \right\},$$

$$\beta = \max\left\{ \frac{a_{N-1}}{a_N}, \frac{a_{N-2}}{a_{N-1}}, \cdots, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_1} \right\}$$

とおく．このとき，このとき $f(z)=0$ の任意の根は $\alpha \le |z| \le \beta$ を満たす．

この定理は比較的簡単に証明できるので，一度証明を試みていただきたい．その出典は [373, 478, 468] である．美しい定理であるので，様々な論文で引用され，様々な一般化が考えられている．この定理は掛谷宗一が 1912 年に [478] で発表し，その証明を与えたものである．実用的な応用があるわけではないが，形式的な美しさがあるので，多くの数学者から引用され，掛谷の定理と呼ばれるようになった．しかし，実は，掛谷よりも 20 年近く前，1893 年にエーネストレム[23]が同じ定理を発見し，簡単な証明を与えていたのである ([373])．この事実に基づき，現代ではこの定理をエーネストレム－掛谷の定理と呼ぶことが多い．

現代では，掛谷宗一を最も有名にしているのは掛谷の問題であろう．これについては文献 [290] と新井 [6] を参照してほしい．

* * *

演習問題

[問題 1] ✿ a_j がすべて相異なるとき行列 (9.4) の行列式がゼロでないことを示せ．

[問題 2] ✿✿ (9.24) を証明せよ．

[問題 3] ✿ 次の命題は正しいか？

「$f(-1), f(0), f(1)$ がすべて整数であるような $[-1,1]$ 上の連続関数 f が与えられたとき，任意の $\epsilon > 0$ に対してある**整数係数**多項式 p で

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x)-p(x)| < \epsilon$$

が成り立つものが存在する．」

[問題 4] ✿ $0<a<b<1$ とする．このとき任意の $\epsilon>0$ と任意の $f \in C[a,b]$ に対し，整数係数多項式 p で，

$$\max_{a\le x\le b} |f(x)-p(x)| < \epsilon$$

となるものが存在することを証明せよ．

[問題 5] ✿✿ 近似式

$$\theta \approx A\sin\theta + B\sin\frac{\theta}{2} + C\sin\frac{\theta}{4}$$

の右辺が $\theta + O(\theta^7)$ $(\theta \to 0)$ となるように係数 A, B, C を選べ．これが (9.22) と一致していることを確かめよ．

23 オイラーの著作にエーネストレム番号を付けた人物である．

中書き

以上で 19 世紀中頃までの関数の発展に関する概説を終わる．元々の予定では 20 世紀中頃までの話題を概観する予定であったが，著者にそうした概観ができるにはまだまだ時間を要する．分布（超関数）や佐藤超関数 (hyperfunction) に関する話題も必要だし，関数空間に関する歴史も必要であろう．将来著者に余裕ができれば，こういった話題にも挑戦したいが，現状では不可能である．そこで，はなはだ不本意ではあるが，自らの非力を自覚し，本書はここでいったん終えることにする．19 世紀後半や 20 世紀の関数の様々な話題でストーリー化できなかったものを付録として，話題を列伝的に紹介したいと思う．

付　録

A 複素関数論の歴史

関数の歴史について語るのであれば，当然複素関数についても述べるべきであろう．しかし，これはこれだけで多くの話題があり，1 冊の本となるくらいの史実がある．著者の努力はそこまで追いついていない．そこで，本付録において，[96, 207, 239] を参考にしながら，複素関数論の勃興期におけるいくつかの話題を整理しておくことで満足することにしよう．

一般に，複素関数論（コーシーの定理，留数など）はコーシーが 1814 年から 1831 年にかけて作り上げたものであるというのが定説である ([239])．ガウスが 1811 年頃に，その後コーシーが発見することになる諸定理を見つけていたというのは事実であろうが，公表もしなかったし，その後の数学の発展に何も影響を与えなかったのであるから，本書では無視することにする．コーシー以前に複素関数が全くなかったというわけではない．オイラーは複素数を自由に使っていたし，ラプラスやポアソンは複素積分を用いていた．また，ダランベールはいわゆるコーシー－リーマン方程式をすでに 1752 年に見いだしていた（[117] の 60 ページ）．しかしながらこうした業績はあくまで個別の話題であり，それがいかに優れたアイデアであったとしても，「複素関数全体に共通する美しい理論が展開できる」という認識に至っていたとは言えない．本書では，複素関数論はコーシーが作り上げたものであるとしておきたい．

A.1 虚数から複素数へ

そもそも複素関数論が市民権を得る前に複素数が市民権を得る必要があるが，1800 年頃に複素数は数学界で市民権を得ていたと言っていいのであろうか？ 必ずしもそうではなかったのである ([207])．

複素数の歴史は少なくとも三次方程式の解の公式（カルダノの公式）にまで遡ることができる．高校の教科書では，「二次方程式 $X^2 + 1 = 0$ の根が $\sqrt{-1}$ だから虚数が必要になる」と書かれるのが普通であるが，こういう主張の仕方は 19 世紀以降のものである．二次方程式に相当するものは古代から知られていたのだが，いわゆる判別式が負になる場合に出会ったら，「これは解けない」ということで終わっていたのである ([116])．こうした態度はカルダノ (1501–1576) の頃になっても

同じであった．$X^2+1=0$ の根など意味がないから考える必要もなかったのである．カルダノ [106] の 37 章には $x(10-x)=40$ を問題として挙げており，その解は実数ではない．実際，カルダノは $5 \pm \sqrt{-15}$ を[1]形式的に導いている．しかし彼は，「方程式は解けない」と判決を下しているのである．

しかし三次方程式ではこういう態度ではすまない．実根を持つ三次方程式にもかかわらず，カルダノの公式に当てはめるとどうしても虚数が出てくる場合がある．これはカルダノでは明示的には現れていないが，1572 年のボンベッリ[2]の『代数学』では明示的に現れている．すなわち，三次方程式の「還元できない場合」である．これを説明するために，カルダノの公式を現代的な形で復習しておこう[3]．一般の三次方程式は

$$x^3 = px + q \qquad (p, q \text{ は定数})$$

の場合に帰着できる．このとき，

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \tag{A.1}$$

が根の公式である．カルダノは，たとえば，$p=6, q=40$ や $p=6, q=6$ の場合を考え（[106] の 12 章），正しい答えを与えているが，「$p/3$ の 3 乗が $q/2$ の 2 乗よりも大きいときには，アリザの問題に解を見出すであろう．」と述べている．これが何を意味するかはわかっていないが，この場合には平方根の中が負になるので，虚数が出てくる．従って，このままでは意味がないということでカルダノはこのケースを遺棄したのであろう．しかし，彼はこの場合でも解けることがあることはよくわかっていた．たとえば 25 章で $x^3=14x+8$ が根 $x=4$ を持つことを知っていたからである．にもかかわらず，この方程式の根を (A.1) で解けるとは彼には思えなかったのであろう．

このあたりの困難さを打ち破ったのがボンベッリである．彼は [94] において，$x^3=15x+4$ を考える．これは，$q^2/4-(p/3)^3<0$ の場合にあたるから，カルダノの公式が（複素数を使わない限り）意味を持たない場合である．公式をそのまま当てはめると

1　カルダノの記号では 5 p̃. R̸ m̃.15 & 5 m̃. R̸ m̃.15 である．

2　Rafael Bombelli (1526-1572)．生前は水理技術者として名声を得ていたと言われている．

3　カルダノには現代的な表記法はなかったから，これと同値なことを言葉だけで説明していた．従って，彼の説明は現代人にはわかりにくく，[106] に戻って説明するのは建設的ではない．現代的な形で話すことをお許しいただきたい．

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

を得る．そうして，ここが彼の優れた洞察なのだが，$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ と $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$ に気づく．そうすれば，

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$$

となって，正しい根 $x = 4$ を得る．こうして彼は，カルダノの公式が複素数を経由して正しい根にたどり着くことに気づいたのである．彼は複素数の必要性を直感的に認識したのであろう．$\sqrt{-1}$ に più di meno という名を，$-\sqrt{-1}$ に meno di meno という名を与えている．カルダノは複素数を認めたものの，これから有用なものを引き出せるとは考えておらず．複素数に出くわしたところで不可能としているのである（[106] の 37 章）．しかしボンベッリは普通の数との演算を現代的な感覚で認めており，複素数を介して実根にたどり着くという重要な知見を得た．この違いは大きい．この意味で，クロスリーが [116] において，「ボンベッリは複素数をきちんと扱った最初の人である」と称賛しているのは故のないことではない[4]．

ボンベッリの発見によって，複素数は回避できないもの，無視できないものとなるのである[5]．このボンベッリの発見にもかかわらず，複素数が数としての市民権をただちに得たわけではなく，複素数に対する数学者の態度は揺れ動くのである．

複素数に「空想的な (imaginaire)」という形容詞を付けたのはデカルト[6]である[7]．方程式の根として形式的に導かれるものの，実在性をもたない，という気持ちであったろう．[125] を読むと，デカルトの複素数に対する態度はかなり冷たいと言わざるを得ない．ニュートンに大きな影響を与えたウォリスは，虚数に対して，より肯定的であった．二次方程式の虚根を幾何学的な作図で理解しようとする努力が見える[8]．しかし，彼は複素平面の概念にたどり着いたわけではない．オイラーの頃になると複素数は自由に使われている．1752 年にはダランベールがコーシー－リーマン方程式を考え，それを解くために $\sqrt{-1}$ を使っている[9]．オイラーの代数学の教科書 [142] の第 I 部の 13 章は複素数の説明にあてられている．オイラーは複素数を空想上の数とか不可能な数と呼んでいるが，同時に彼は，「そうした数

---

4 [11, 79, 116] にはボンベッリの『代数学』に関する解説がある．

5 実係数で 3 根とも実数である場合に，実の四則演算と実のべき根のみを使って表す公式は存在しないことがその後証明されている——ヘルダー [466], 1891 年．証明はたとえば [31] の 41 節を見よ．

6 René Decartes (1596-1650).

7 1637 年，[125] の 214 ページや 226 ページ．

8 1685 年．[237].

9 [117].

Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$. Jam ante omnia in numeratore nostrae formulae loco cos. Φ has duas partes substituamus

$$\tfrac{1}{2}(\cos.\ \Phi + i \sin.\ \Phi) + \tfrac{1}{2}(\cos.\ \Phi - i \sin.\ \Phi),$$

図 **A.1** $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ が初めて使われたオイラーの論文 ([397]).

も頭の中では存在する．だから使ってよい」とはっきり言明しており，邪悪なものであるという扱いはしていない．カジョーリ [104] によれば，$\sqrt{-1}$ に i を使ったのはオイラーが最初である．彼の死後に出版された 1794 年の積分学の教科書（の改訂版）に出てくる ([397])．しかし，この記号も直ちに定着したわけではなかった．

しかし，**18 世紀には複素数を平面上の点と同一視することはされていなかった．** [207] によれば，デンマークの人ウェッセル[10]が 1799 年に発表した論文が史上初めて複素数と平面の点を同一視し，複素数の代数的演算を平面幾何学的に解釈したものであるということである．しかしながら，彼の論文（[237] に抄訳がある）はほとんどの数学者の目に触れることもなく 100 年ほどの間忘れ去られた．彼の後，スイス人アルガン[11]がウェッセルの仕事を知らずに 1806 年に同じことを再発見している ([73])．フランスの文献では複素平面をアルガン平面と呼ぶことがあるが，この意味でその名称は理由がないことではない．しかし，これも学会の大きな注目を集めたわけではなかった．19 世紀初頭ではまだまだ複素数は市民権を得ていたと言うことはできないようである ([207, 346])．

虚数という表現ではなく，複素数という名前を使ったのはガウス[12]である ([422]，1831 年)．現代の多くの教科書では，平面上の点と対応させることにより複素数の市民権を確立した功績をガウスに帰しており，虚数という言葉に残っている胡散臭さを取り除くために複素数という言葉にしたと説明されることが多い．しかし，[422] では虚数という言葉も残っているのであるから，この説明では納得できない．いずれにせよ，複素平面のアイデア自体は，上にも述べたように，様々な人が独立に発見したものである．従って本書では，アルガン平面でもなく，ガウス平面でもなく，複素平面という言葉を使うことにする．

現代では $\mathbb{R}$ を既知としてそれから $\mathbb{C}$ を定義するに最もよく用いられるものは実数の順序対 (a, b) を複素数 $a + \mathrm{i}b$ と見なす方法であろう．そして，

10 Caspar Wessel (1745-1818).

11 Jean Robert Argand (1768-1822).

12 Carl Friedrich Gauß(1777-1855). ガウスの伝記として [135] が著名である．

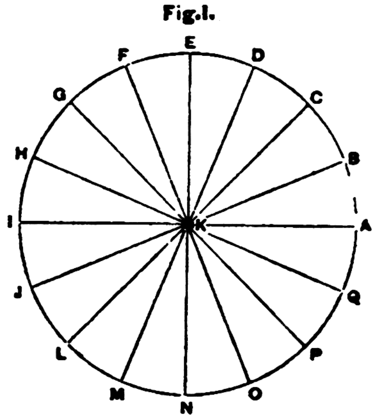


図 A.2 アルガンの図（[73] より）．原点が K で表され，KA が 1 を表し，KI が -1 を表す．このとき，$KE^2 = KA \times KI$ という幾何学的な関係から $KE = \sqrt{-1}$ と説明している．

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \qquad (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

によって足し算とかけ算を定義するわけである．このやり方はハミルトン [446] が 1837 年に導入したものである．これだと，幾何学的な対象である平面を用いなくても，純粋に解析的に複素数を定義できるという長所がある．結局，複素数の概念が導入されてから確立されるまでに，約 300 年を要したわけである．この間，多くの人々は複素数を恐る恐る使っていたのである．逆に言えば，複素数は定義すら曖昧なまま，有用性を発揮していたということになる．

A.2 微積分と虚数

ライプニッツやヨハン・ベルヌーイは，複素数係数の有理関数に微積分の計算規則を適用し，有益な結果を得ている．たとえば，ベルヌーイは，1712 年，正接の n 倍角の公式を次のように導いている（[299]）．n を自然数として，

$$\tan A = x, \qquad \tan nA = y$$

とおくと，$n \arctan x = \arctan y$ である．微分すると，

$$n\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}.$$

これを，$\sqrt{-1}$ を用いて

$$n\left(\frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{-1}} - \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{-1}}\right) = \frac{\mathrm{d}y}{y-\sqrt{-1}} - \frac{\mathrm{d}y}{y+\sqrt{-1}}$$

と変形する．これは次式を意味する．

$$n\log\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}=\log\frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}}\quad \text{つまり，}\quad \left(\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}\right)^n=\frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}} \tag{A.2}$$

この式を y について解けば，$y=\tan nA$ を $x=\tan A$ で表す公式が得られる，といきたいところだが，n が偶数のときには，正しくはない．ベルヌーイもこの点に注意しているが，n の偶奇がどこに影響しているのかという点には，説明を与えていない．概して 18 世紀以前の解析学においては，結果を巧妙に導くことが何よりも優先されており，その結果を導く方法の妥当性の検討，あるいは妥当範囲の吟味は，関心外であることも少なくなかった．

さらに重大なことは，こうした式変形をベルヌーイが無頓着に行っているということである．これは彼が，積分定数の不定性や log の多価性といった問題に全く気づいていないことを意味する[13]．言い換えれば，少なくともこの手の問題に関しては，ベルヌーイの理解は，かなり素朴なレベルにとどまっていたようで，$\log(-1)$ の値をめぐってライプニッツと交わされた論争の中で，その虚数性を主張するライプニッツに対し，

$$\frac{\mathrm{d}(-x)}{-x}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad \text{や}\quad 2\log(-1)=\log(-1)^2=\log 1$$

などを根拠に，ベルヌーイは，$\log(-1)=0$ を主張している ([470])．

$\log(-1)$ の，したがって一般に $\log z$ の多価性に結着をつけたのはオイラーである（[392]，1749 年）．彼は，彼の有名な公式

$$e^{\sqrt{-1}\theta}=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$$

を基礎に，e^z の周期性，したがって $\log z$ **の多価性**，特に

$$\log(-1)=(2n+1)\pi\sqrt{-1}\qquad (n\in\mathbb{Z})$$

を導いたのである[14]．

さらにオイラーは，次のように複素積分を形式的に導入した ([385])[15]．まず，通常の積分（反微分）の等式

13　おかしくなった理由は，(A.2) において積分定数を無視していることにある．積分定数を考慮すれば，

$$\left(\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}\right)^n=A\frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}}\qquad (A\ \text{は定数}) \tag{A.3}$$

となる．$x=0$ のときに $y=0$ であるから，$A=(-1)^{n-1}$．だから，n が奇数のときには正しい答えを与えるが，偶数だと正しくない．

14　『無限解析序説』では気づいていなかったが，翌年に気づいた．[392] の 215 ページ．

15　この論文は彼が 1777 年に提出したのであるが，その死後，1793 年に出版されている．

$$\int Z(z)\mathrm{d}z = V(z)$$

において，変数 z を変数 $x+y\sqrt{-1}$ におきかえたとき，被積分関数を $Z(x+y\sqrt{-1}) = M(x,y)+\sqrt{-1}N(x,y)$，右辺を $V(x+y\sqrt{-1}) = P(x,y)+\sqrt{-1}Q(x,y)$ とおくと，

$$\int (M+\sqrt{-1}N)(\mathrm{d}x+\sqrt{-1}\mathrm{d}y) = P+\sqrt{-1}Q \tag{A.4}$$

が成り立つはずである．(A.4) を実部，虚部に分ければ[16]，

$$\int (M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y) = P, \quad \int (N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y) = Q \tag{A.5}$$

が得られる．オイラーはこれらの等式を利用して，未知の積分を既知の積分に帰着させて求めた．この研究は，コーシーに大きな影響を与えることになる．

注意すべきは，(A.5) の左辺が，今日的な線積分として，明確に定義されているわけではないことである．オイラーはこの点に関しては，左辺の積分が存在することから，

$$M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y, \qquad N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y$$

がともに完全微分であり，従って，M と N について

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} \tag{A.6}$$

が成り立つことを指摘している．つまりオイラーは，任意の関数 $Z(z)$ の変数 z に複素変数 $x+\sqrt{-1}y$ を代入して得られる関数の実部と虚部に関して，ある特殊な関係（いわゆる**コーシー－リーマン方程式**）が成立することに注目しているのである[17]．

ダランベールは流体力学の問題からこの関係式に到達している．つまりコーシー－リーマン方程式自体は，コーシー以前にも発見されていたのである．しかし，オイラーやダランベールには，そして後で述べるように初期のコーシーにも，この関

---

16 オイラーはこのように実部・虚部を比較する代わりに，$Z(z)$ に $z = x-\sqrt{-1}y$ を代入して得られる

$$\int (M-\sqrt{-1}N)(\mathrm{d}x-\sqrt{-1}\mathrm{d}y) = P-\sqrt{-1}Q$$

と (A.4) を連立して (A.5) を導いている．ここでは，「任意」の関数 $f(z)$ に対し

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

が仮定されていることに注意しよう．ダランベールは，この関係を虚数解析の基本定理と呼んでいる．なお，上の手法は，コーシーにも受け継がれる．

17 任意の関数がコーシー－リーマン方程式を満たすという主張は我々から見れば変であるが，オイラーの関数が式で表されるものであることから納得できる話である．

係と複素関数 $Z(z)$ の微分可能性との本質的な関係が認識されていなかった[18].

古典的確率論の祖であり天体力学にその名を残すラプラス[19]も，虚数を形式的に利用して正規分布に関連して現れる複雑な積分の計算を実行した．この証明法をポアソンに批判されたせいもあろうが，ラプラスは，虚数の利用が発見のための便宜的手法に過ぎないと認識していた点でオイラーよりも進んでいた．彼は，実表現の間で成立する関係をそのまま虚数に適用することを「**実から虚への移行** (le passage du réel à l'imaginaire)」と呼び，定積分の値を求めるのに有効な方法であることを認識していた．この「実から虚への移行」というのは第 II 部第 4 章 4.2 節で説明したような複素数の代入を使う方法と考えてよい．しかし，ラプラスは，1810 年の論文 [501] の 361 ページで，「しかしながら，このような方法は，帰納の方法と同じく，十分な注意と慎重な熟慮をもって使われたとしても，その導かれた結果を直接的に証明することが常に望ましいというべきものである」と述べており，厳密性には欠けるという認識に至ってはいるようである．

ポアソンとラプラスは，当時一世を風靡していた代数的形式主義という風潮への過度の傾斜に対して警鐘を発した最初の数学者といってよいであろう．「形式の普遍的妥当性」に対して，現代数学につらなるような厳密な論理的立ち場に立つ批判主義的な動きが，フランス革命の時代に登場してきていることは，歴史の持つ弁証法を考える上で示唆的な出来事の一つである．こうして数学も「本格的な理性の時代」の幕開きを迎えるのである．とはいえ，一度確立されたパラダイムが，そう簡単に崩壊するわけではない．ポアソンもコーシーも，口ではラプラスと同じ主張を展開するが，彼らの研究の具体的な側面ではこの建前とは大きく食い違うところが少なくなかった．

A.3 コーシーの複素積分論

A.3.1 初期の展開

本節では [536] を基にしてコーシーの複素関数論を考察する．いわゆるコーシーの**積分定理**と**積分公式**を主題とする主要な論文はふたつある．1814 年に書かれ，1827 年に出版された「定積分論」[335] と 1825 年の「虚端点上の定積分論」[336] である．留数の理論や分岐点の特異性に関する研究は，ここで確立される複素積分

18 この関係を明確に認識し，さらに等角写像との関連も明白にとらえたのは，リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866) である．

19 Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

を基礎に，1826 年以後に展開されていくことになる．

さて，上の二つの論文はほとんど同じ表題をもち，同じ主題を追求しながら，その内容はまるで違う．複素積分論の最初の着想と，十数年の熟成を経て洗練された理論の違いが鮮明に現れている．1814 年の論文は，200 ページにもわたる長大なもので，若きコーシーの意気込みを感じさせるものである．序文には，従来の数学者が実から虚への移行によって得た成果[20]を，「直接的かつ厳密な解析の上に」打ち立てる，という決意を意欲満々に表明している．その一方，本文の叙述はひどくまどろっこしく，かつ現代の水準から見ると恐ろしく不明瞭で，論文の著者は本質がよくわかっていないのではないか，と疑いたくなるような代物である．そのためか，この論文は，1825 年の論文と比べると大した注目も浴びず，日本語による数学的な解説もほとんどない状況である[21]．そこで，まず 1814 年の論文の内容を簡単に紹介しよう．

この論文は，そのはしがきに「すでに古くなった部分もあるが，初めに得た評判がとても良かったので印刷することにした」とあるように，1827 年になってから，より進んだ視点に基づく傍註をつけ加えて出版されたものである．本文は二部に分かれており，第一部は「実から虚への移行を正当化する等式について」，第二部は「微分方程式の積分がもたらす諸困難について」というタイトルが付けられている．それらの内容を今日的に割り切っていえば，第一部は積分定理とその応用，第二部は積分公式とその応用である．分量では，第二部が全体の 2/3 を占める．

A.3.2 コーシー－リーマン方程式の導出

第一部の冒頭は「任意」の有限確定な関数 $f(z)$ の積分 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$ において，z が x, y の関数であれば，それを x と y で 1 回ずつ微分することにより，等式

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{A.7}$$

が得られると主張する．(A.7) の正しさは後で検証することとし，ここではこれを認めよう．コーシーは

$$f\left(x+\sqrt{-1}y\right) = u(x,y) + \sqrt{-1}v(x,y) \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

とおく．すると (A.7) は，

20 コーシーはここで，オイラー，ラグランジュ，ルジャンドルを引用している．

21 ただし，欧米には文献がある．ボッタツィーニ [96] の 4.2 節，[374]，そして，スミスィーズ [239] である．

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y)+\sqrt{-1}v(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u(x,y)+\sqrt{-1}v(x,y)\right)\cdot\sqrt{-1}\right]$$

となり，したがって，$u_y(x,y)+\sqrt{-1}v_y(x,y)=-v_x(x,y)+\sqrt{-1}u_x(x,y)$，すなわち，

$$u_y(x,y)=-v_x(x,y),\qquad v_y(x,y)=u_x(x,y) \tag{A.8}$$

という，コーシー－リーマン方程式が導かれる．コーシーは，これこそ，「実から虚への移行を正当化する等式」であると言うのだが，この意味は後で述べる．

ところで，微分可能性（今日の言葉で言えば正則性）を仮定しない「任意」の関数 f に対し，$f\left(x+\sqrt{-1}y\right)$ の実部と虚部について (A.8) が成立するという「証明」のトリックはどこにあるのだろうか．

コーシーの表現を少し精密化してみるとそれが明らかになる．まず，

$$F(z)=\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{A.9}$$

とおいたとき，$z=\varphi(x,y)$ とおいて得られる $F(\varphi(x,y))$ を，x,y で微分したとき，結果は微分の順序によらないと考えられるので

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}F(\varphi(x,y))=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(\varphi(x,y)) \tag{A.10}$$

が成立するはずである．合成関数の微分法によって，

$$\frac{\partial}{\partial x}F(\varphi(x,y))=f(\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}F(\varphi(x,y))=f(\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$$

と計算されるので，(A.10) は

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{f(\varphi(x,y))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{f(\varphi(x,y))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right\}$$

となる．これが (A.7) の意味であると解釈できる．

ところが，この「推論」の中，今日の言葉で表現すれば，(A.9) が，a から z に向かう積分の径路によらず定義できているということ，そしてこれが $f(z)$ の原始関数を与えること（微積分の基本定理）を自明なこととして使っていることに注意していただきたい．この中に，$f(z)$ の正則性の仮定が密輸入されているのである．

モレラ[22]の定理：領域 Ω 内の任意の区分的に滑らかな単純閉曲線 C に対し

22 Giacinto Morera (1856-1907).

$$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$$

が成り立つならば $f(z)$ は Ω で正則である.[23]

を念頭におくと[24], コーシーの「密輸入」は誠に巧妙であったと言わざるを得ない.

だが, このように論理的に整理するだけでは, 歴史を叙述することにはならない. そもそも積分 (A.9) が, 今日我々が予想するような線積分の意味ではない. 初めに述べたように, コーシーは積分区間の上端・下端さえ指定していないのである. コーシーが提示した世界を, もっと接近して見てみよう.

A.3.3 微積分学の基本定理と微積分学の厳密化

コーシーに限らず, 19 世紀初頭までの数学者にとって, 関数 $f(z)$ とは, z を含む式——オイラの言葉を使えば解析的表現——であったのだから,

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)$$

において, $f(z)$ も $F(z)$ も z の「解析的表現」であれば, z の任意の関数 $\varphi(x,y)$ を代入することができ, x,y についての等式が生ずる.

一方, 積分 $\int f(z)\mathrm{d}z$ は反微分（微分したら $f(z)$ になる z の関数）であったから[25], 当時の彼にとって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int f(z)\mathrm{d}z = f(z) \tag{A.11}$$

は自明である. だからこそ, コーシーは複素変数関数の微分を改めて定義する必要

23　1886 年. [531].

24　複素平面上, 点 a から点 z へ向かう二つの積分路を向きを付けて C_1, C_2 とすると, $C_1 + (-C_2)$ は a を出発し z を通って a に戻る閉路になる. そしてこのとき

$$\int_{C_1+(-C_2)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$$

は,

$$\int_{C_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{C_2} f(\zeta)d\zeta$$

となる（すなわち, 積分値は a から z へ向かう径によらず, 定まる）. そして, この値を $F(z)$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = f(z)$$

が成り立つ.

25　この枠組みの中で 17 世紀以来の求積法の大躍進があったのである.

性すら感ずることなく，(A.11) を利用するのである．

まさしく，17, 18 世紀的な代数的形式主義の手法が．ここに発揮されているのだが，当のコーシーには，その自覚がない．自覚がないどころか，これで，従来の代数的形式主義を克服できたと考えていたようである．この点に関し，論文の査読者ルジャンドル[26]はラクロアと連名で ([508])，「正当化と言っている割には何もしていない」という旨の評価を下しているが，これは正当であろう．もしも，コーシーがルジャンドルの批判に応えるとすれば，そもそも複素積分の意味，複素変数による微分の定義を，実から虚への移行によらずに確定せねばならないはずだが，それはできていない．

コーシーはその後，微積分の教科書を 2 冊書く．有名な『解析教程』([107], 1821 年）と『微積分学要論』([108], 1823 年）である．標準的な数学史の記述に従えば，ここにおいて彼は，ニュートンやライプニッツ以来の微積分法から，流率とか無限小などの運動学的なあるいは論理的に不明瞭な概念を追放して，いわゆる ϵ-δ 論法に基づく極限概念を基礎に，微積分学を論理的に体系立てた——コーシーの表現によれば「解析学に幾何学の厳密さを打ち立てた」——ことになっている．実際，積分 $\int_a^b f(x)dx$ についてもコーシー和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

の極限として定義し，その定義に基づいて，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x)$$

を証明し[27]，これを用いて，積分を反微分として計算することの合理化を行った．そして，こうした業績を背景に，コーシーを解析学の算術化の祖とする評価が定着してきた．

しかし，1814 年論文における「証明」のスタイルを念頭におくならば，「微積分法の魑魅魍魎（ちみもうりょう）に毅然と立ち向かう純粋数学主義者コーシー」を考えるのは自然ではない．むしろ，複素積分・複素微分の意味の検討という動機が，実積分・実微分そのものの不明確さの認識へと発展した，と考えるべきであろう．必要は発明の母である．19 世紀ににわかに活発化する解析学の厳密化運動の背景に，多くの「必要」があったことが，グラビナーによって指摘されている ([150]) が，実関数論の

26　Adrien Marie Legendre (1752-1833).

27　[108]．任意の有界閉区間上の連続関数が定積分をもつことの証明において，コーシーが，連続性と一様連続性を判然と区別しなかったのは有名な話である．

厳密化の大きなモチーフに，複素関数の微積分の正当化があったものと筆者は推測している．

もっとも，コーシーがルジャンドルに指摘された1814年論文の欠点をどれほど致命的なものとして受け止めていたかは不明である．1827年になってこの論文を出版する折にも，その点に関して一切言及していないからである．この例に限らず，いったん確立されたパラダイムから脱け出ることが，パラダイムの中に生きる者にとて，どれほど困難であるかを示す例は科学史ではいくらでもある．

A.3.4 積分定理の第1証明

次に，「積分定理・積分公式」について述べよう．(A.8) の両辺を矩形 $a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2$ 上で二重積分すると，

$$\int_{a_1}^{a_2} \{u(x,b_2) - u(x,b_1)\} \mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2} \{-v(a_2,y) + v(a_1,y)\} \mathrm{d}y \tag{A.12}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \{v(x,b_2) - v(x,b_1)\} \,\mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2} \{u(a_2,y) - u(a_1,y)\} \,\mathrm{d}y \tag{A.13}$$

が得られる．ここで，二重積分は順序交換可能な累次積分と同一視されている．

さて，コーシーの議論は，(A.12)(A.13) を導くところで止まっているのであるが，1825年になって注釈しているように，(A.12) + $\sqrt{-1}$ × (A.13) を作ると

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} \left\{u(x,b_2) + \sqrt{-1}v(x,b_2)\right\} \,\mathrm{d}x - \int_{a_1}^{a_2} \left\{u(x,b_1) + \sqrt{-1}v(x,b_1)\right\} \,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{-1} \int_{b_1}^{b_2} \left\{u(a_2,y) + \sqrt{-1}v(a_2,y)\right\} \,\mathrm{d}y \\
&- \sqrt{-1} \int_{b_1}^{b_2} \left\{u(a_1,y) + \sqrt{-1}v(a_1,y)\right\} \,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{A.14}$$

となり，左辺の第1項，第2項は，複素平面上の長方形ABCDにおいてそれぞれ有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に沿う積分，右辺の第1項，第2項は $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ に沿う積分を表している（図A.3）．

4辺に図A.3のように向きを与えれば，(A.13) は次のように書ける．

$$-\int_{c_3} f(z) \,\mathrm{d}z - \int_{c_1} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{c_2} f(z) \,\mathrm{d}z + \int_{c_4} f(z) \,\mathrm{d}z$$

したがって

$$\int_C f(z) \,\mathrm{d}z = 0 \qquad (C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \tag{A.15}$$

という，いわゆる「コーシーの積分定理」が得られると解釈できる．ただし，次の

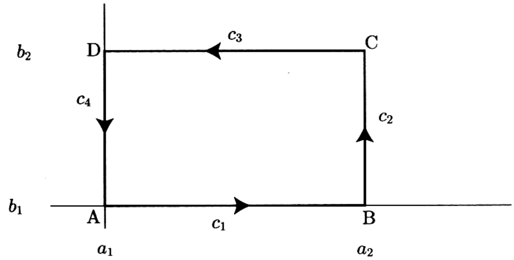


図 A.3 複素平面内の長方形経路.

ことには注意しておくべきである．1814 年の論文には，図 A.3 はおろか，複素平面上の曲線に沿う線積分の概念を明白に示す表現はまったく見当たらない．むしろ，この時期のコーシーは，怪しげな虚数表現を可能な限り回避することを建前としている．その結果，(A.12)(A.13) を，複素表現を利用して (A.14) 一式にまとめることのメリットを見出せなかったのである．つまり，実軸・虚軸に平行な辺をもつ長方形に沿っての積分定理は，

$$u_x + \sqrt{-1}v_x = v_y - \sqrt{-1}u_y \qquad \left[= f'\left(x + \sqrt{-1}y\right)\right]$$

の両辺の二重積分（累次積分）の相等性

$$\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\left(u_x + \sqrt{-1}v_x\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\left(v_y - \sqrt{-1}u_y\right)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

に他ならないわけである．一般の単一閉曲線 C に沿った積分については，C の内部を D として，グリーンの定理[28]を用いて D 上の重積分におきかえ，コーシー－リーマン方程式を用いる，という今日の標準的な積分定理の証明法の原型がすでにここに見られることに注意しよう．

なお，1814 年論文には，矩形以外の閉曲線に沿った場合の積分定理に相当するものもあることにも注意しておきたい．コーシーは，$f(z)$ において z に $x+\sqrt{-1}y$ ではなく，

$$z = M(x,y) + \sqrt{-1}N(x,y)$$

を代入した[29]．このような複雑化を敢えて選んだ理由は，明示されてはいない．しかし矩形上を動く $z = x + \sqrt{-1}y$ に対し，$w = M(x,y) + \sqrt{-1}N(x,y)$ は（M, N

28 ただし，グリーンの定理が発表されたのは 1828 年で，定着するのはもっと後である ([545, 349]).

29 コーシーよりも前にオイラーが $\sqrt{-1}$ を i で表していたが，1814 年の段階で i は定着しておらず，コーシーは $\sqrt{-1}$ を用いている．

についての若干の仮定の下で）ある単一曲線 C を描き，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(u(M,N)+\sqrt{-1}v(M,N)\right)\left(\frac{\partial M}{\partial y}+\sqrt{-1}\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(u(M,N)+\sqrt{-1}v(M,N)\right)\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial N}{\partial x}\right)\right\}$$

の両辺を $[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ 上で積分したものは，ちょうど，曲線 C に沿った線積分になるのである．

コーシーは，

$$\begin{cases} M=ax \\ N=xy \end{cases},\qquad \begin{cases} M=x\cos y \\ N=x\sin y \end{cases},\qquad \begin{cases} M=ax^2 \\ N=xy \end{cases} \tag{A.16}$$

などの具体例で計算してみせているが，これらがどのような経路になるかは演習問題としよう．

第一部の残りは，この公式 (A.12) や (A.13) に対する応用例で埋めつくされている．つまり，(A.12) の各式の両辺に現れる四つの定積分の値のうち，三つがわかれば，残りの一つの定積分の値がわかる，というわけである．ここでは，それらの中から，最も典型的な例を一つ挙げよう．$f(z)=e^{-z^2}$ とする．$z=x+\sqrt{-1}y$ を代入すると，$f(x+\sqrt{-1}y)=e^{y^2-x^2-2xy\sqrt{-1}}$. すなわち，

$$u(x,y)=e^{y^2-x^2}\cos 2xy,\qquad v(x,y)=-e^{y^2-x^2}\sin 2xy.$$

$a_1=b_1=0$, $a_2=\alpha$, $b_2=\beta$ として (A.12) を用いると

$$\int_0^\alpha\left[e^{\beta^2-x^2}\cos 2\beta x-e^{-x^2}\right]\mathrm{d}x=\int_0^\beta e^{y^2-\alpha^2}\sin 2\alpha y\,\mathrm{d}y.$$

したがって，

$$e^{\beta^2}\int_0^\alpha e^{-x^2}\cos 2\beta x\,\mathrm{d}x-\int_0^\alpha e^{-x^2}\mathrm{d}x=e^{-\alpha^2}\int_0^\beta e^{y^2}\sin 2\alpha y\,\mathrm{d}y$$

となる．ここで $\alpha\to\infty$ とすれば，右辺は 0 に収束するから

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\beta x\,\mathrm{d}x=e^{-\beta^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$$

が得られる．同様に，(A.13) からは

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2\beta x\,\mathrm{d}x=e^{-\beta^2}\int_0^\beta e^{y^2}\mathrm{d}y$$

が得られる．

A.3.5 不定積分から定積分への移行に伴う困難

1814 年論文の第二部では，積分区域において被積分関数が**不確定**[30]あるいは，**無限定**[31]になる場合——今日の用語を用いれば特異性をもつ場合——を考える．その場合には，累次積分の順序交換は無条件には認められない．これをコーシーは，「不定積分から定積分への移行に伴う困難」と呼んでいる．

たとえば，$\varphi(x,z) = \dfrac{z}{x^2+z^2}$ とおいて[32]，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

を $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ で累次積分すると，積分の順序により

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{z}{x^2+z^2}\right]_{z=0}^{z=1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+z^2}\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \frac{-1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{4}$$

となる．

もちろん，被積分関数は，$(x,z)=(0,0)$ で特異性をもつので，上の積分は，特異点を避けた積分の極限としての意味で解釈せねばならないが，今日「広義積分」あるいは「コーシーの主値」という特別の名を与えられるこの積分概念も，この論文では格別の扱いを受けていない．むしろ，彼は，はっきりと，$\Phi(x)$ が $x=a$ で不連続性を有するときでも，

$$\lim_{x\to a}\Phi(x)$$

が存在すれば，それを $\Phi(a)$ と見なすという立場を自明のものとしてさえいる[33]．

この点については，論文の査読者のルジャンドル [508] の方が，はるかに明晰で，(A.12)，(A.14) の相違は，

---

30 indéterminée.

31 indéfinie.

32 [335] の 394 ページ．

33 他にもたとえばコーシーは（第 II 部 5 章 5.4 節で紹介したように，）$y=e^{-1/x^2}$ を導入しているが，ここで $x=0$ のときには $y=0$ と断り書きなどしないのである．$y=e^{-1/x^2}$ と書くだけで $y(0)=0$ が要請されるのである ([334, 108])．

$$\int_\beta^1 \int_\alpha^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} - \arctan\alpha - \arctan\frac{1}{\beta} + \arctan\frac{\alpha}{\beta}$$

において，α も β も無限小だとして，$\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ を使えば，

$$\int_\beta^1 \int_\alpha^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{\alpha}{\beta}$$

となる．したがって，α と β の大きさによっていろんな値をとる，と指摘している．

ともかく，そういう順序交換の不可能性が現に存在しているのだから，前節の方法は破綻する．そこでコーシーは，累次積分の順序交換に伴う誤差を計算する公式を求めようとする．以下，著者による現代的な意訳を入れることにする．まず関数

$$\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}$$

が区間 $[0,a]\times[0,b]$ 内の点 $(0,0)$ で唯一の特異点をもつと仮定して，ふたつの累次積分の差

$$A = \int_0^b \int_0^a \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x \tag{A.17}$$

を次のように計算する．ここで右辺の第 2 項は，

$$\lim_{\eta\to+0}\int_\eta^a \{\varphi(x,b)-\varphi(x,0)\}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \{\varphi(x,b)-\varphi(x,0)\}\,\mathrm{d}x$$

となる（積分の存在は仮定されている）．

第 1 項については，極限をとる前の累次積分を交換して，

$$\lim_{\eta\to+0}\int_\eta^a \{\varphi(x,b)-\varphi(x,\eta)\}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \varphi(x,b)\,\mathrm{d}x - \lim_{\eta\to+0}\int_0^a \varphi(x,\eta)\,\mathrm{d}x$$

とし，これらを (A.17) に代入すると，

$$\int_0^a \varphi(x,b)\,\mathrm{d}x$$

が消しあって，

$$A = \int_0^a \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x - \lim_{\eta\to+0}\int_0^a \varphi(x,\eta)\,\mathrm{d}x \tag{A.18}$$

となる．ϵ を十分小さな正の数とすれば，

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^a \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x - \lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \varphi(x,\eta)\,\mathrm{d}x - \lim_{\eta\to+0}\int_\epsilon^a \varphi(x,\eta)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x - \lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \varphi(x,\eta)\,\mathrm{d}x - \int_\epsilon^a \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

となるので，任意の正数 ϵ を $\epsilon \to +0$ とすれば，第 1 項と第 3 項が打ち消しあって，

$$
A = -\lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \varphi(x,\eta)\,\mathrm{d}x \tag{A.20}
$$

を得る．

$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ が $(0,0)$ で特異性をもっていたのだから，

$$
\int_0^a \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x
$$

の存在や (A.18) における第 1 項と第 3 項の打ち消しあいが気にかかるのは，現代の感覚であって，コーシーがその点を心配している様子はない．そもそも，(A.17) の右辺には $\lim_{\eta\to+0}$ を付けるべきなのに，コーシーの原文にはそれに相当する表現すらない．これについては後で触れる．

(A.17) を一般化して積分区域を $[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ とし，特異点が左下隅にあるとすると，対応する A は，

$$
A = -\lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \varphi(a_1+x,b_1+\eta)\,\mathrm{d}x
$$

となる．特異点が矩形 $[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ の右下隅，左上隅，右上隅にある場合はそれぞれ

$$
A = -\lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \varphi(a_2-x,b_1+\eta)\,\mathrm{d}x, \qquad A = \lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \varphi(a_1+x,b_2-\eta)\,\mathrm{d}x,
$$
$$
A = -\lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \varphi(a_2-x,b_2-\eta)\,\mathrm{d}x
$$

となる．積分区域 $[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ の内部の 1 点 (α,β) で唯一の特異点をもつ場合には，これらに相当するものを加え合わせ，

$$
\begin{aligned}
A = \lim_{\eta\to+0}\int_0^\epsilon \{&-\varphi(\alpha+x,\beta+\eta) - \varphi(\alpha-x,\beta+\eta) \\
&+\varphi(\alpha+x,\beta-\eta) + \varphi(\alpha-x,\beta-\eta)\}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

（ϵ は十分小さな正の数）となる．

先に，(A.20) に到達する際，$\int_0^a \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x$ と $\int_\epsilon^a \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x$ の打ち消しあいが気

楽に行われていると指摘したが，(A.21) を導く四つの計算を同時に並行して進めると，不都合な部分が相殺されるという好運により (A.21) が得られ，得られたものは結果的には正しいことになる．

以上の準備の下で，いよいよ積分公式の証明を紹介する．ただし，難渋な 1814 年論文の中でも，この部分は，とりわけ読みづらい部分なので，原義を損なわない程度に，さらに現代化，あるいは単純化を行うことにする．

$$f(z) = f\left(x + \sqrt{-1}y\right) = u(x,y) + \sqrt{-1}v(x,y)$$

が，$z = z_0 = \alpha + \sqrt{-1}\beta$ で 1 位の極をもつとする．コーシーの表現に忠実に従えば，

$$f(z) = \frac{\mathcal{F}(z)}{F(z)}$$

において，$z_0 = \alpha + \sqrt{-1}\beta$ が $F(z)$ の単根である場合である．ここで，$\mathcal{F}$ は特異点を持たない．

ζ を 0 に近い値とすると，

$$\mathcal{F}(z_0 + \zeta) \approx \mathcal{F}(z_0), \qquad F(z_0 + \zeta) \approx F'(z_0)\zeta$$

であるから，

$$f(z_0 + \zeta) \approx \frac{\mathcal{F}(z_0)}{F'(z_0)} \cdot \frac{1}{\zeta} \tag{A.22}$$

という「近似式」が成り立つ．

$$\lambda - \sqrt{-1}\mu = \frac{\mathcal{F}(z_0)}{F'(z_0)} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \tag{A.23}$$

とおき，ζ を $\xi + \sqrt{-1}\eta$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R})$ と表して（A.22）を実部・虚部に分けて表すと

$$u(\alpha + \xi, \beta + \eta) \approx \frac{\lambda\xi - \mu\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad v(\alpha + \xi, \beta + \eta) \approx \frac{-\lambda\eta - \mu\xi}{\xi^2 + \eta^2}$$

となる．$\varphi(x,y) = u(x,y)$ について (A.21) を計算すると

$$A_u = \lim_{\eta \to +0} 4\mu \int_0^{\epsilon} \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}\, \mathrm{d}\xi = 2\pi\mu$$

となる．同様に，$\varphi(x,y) = v(x,y)$ については，$A_v = 2\pi\lambda$ である．そこでコーシー－リーマン方程式 (A.8) を $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ で積分すると，（A.12）の 2 式にそれぞれ $2\pi\mu, 2\pi\lambda$ を加えたものが得られ，矩形の周 C に沿う積分についての公式

$$\int_C f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi\mu + 2\pi\lambda\sqrt{-1} \tag{A.24}$$

が得られる，と解釈できる．

(A.23) で定められた $\lambda - \sqrt{-1}\mu$ は

$$\lambda - \sqrt{-1}\mu = \frac{\mathcal{F}(z_0)}{\lim_{z\to z_0} \frac{F(z)}{z-z_0}} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\mathcal{F}(z_0)}{F(z)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

と解釈すれば，$z = z_0$ における**留数**に他ならない．もっともこれを導く仮定で (A.22) という素朴な近似式に訴えていることを考えれば，我々のこの解釈は読み込みが強過ぎるという批判もあろう．

A.4 コーシーの複素積分論の後期の展開

複素積分が，その固有の位置を獲得するのは，1825 年の [336] である．本節では，この論文を中心として複素関数論の萌芽期の展開を締めくくることにしよう．

A.4.1 複素積分概念の確立，積分定理の第 2 証明

コーシーが [108]（1823 年）で実関数の積分概念

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}) \qquad x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = X$$

を確立していることにまず注意しよう．ふたつの複素数 $x_0 + \sqrt{-1}y_0, X + \sqrt{-1}Y$ に対し，区間 $x_0 \leq x \leq X$，$y_0 \leq y \leq Y$ の分割

$$\begin{cases} x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = X, \\ y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = X \end{cases} \tag{A.25}$$

に対応する近似和

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(x_k - x_{k-1}) + \sqrt{-1}(y_k - y_{k-1})\right\} f\left(x_{k-1} + \sqrt{-1}y_{k-1}\right)$$

の，分割を限りなく細かくしていったときの極限値として，**複素積分**

$$\int_{x_0+\sqrt{-1}y_0}^{X+\sqrt{-1}Y} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{A.26}$$

が [336] の冒頭で定義される．点 (x_k, y_k) がすべて，曲線

$$C:\ (x,y) = (\varphi(t), \chi(t)) \qquad (t_0 \le t \le T) \tag{A.27}$$
$$\text{ただし，} (\varphi(t_0), \chi(t_0)) = (x_0, y_0), \quad (\varphi(T), \chi(T)) = (X, Y)$$

上にあるとすると，(A.26) は，

$$\int_{t_0}^{T} f\left(\varphi(t) + \sqrt{-1}\chi(t)\right)\left(\dot\varphi(t) + \sqrt{-1}\dot\chi(t)\right)\,\mathrm{d}t \tag{A.28}$$

と表される（ここでも，また以下でも，$\dot{}$ は，t に関する微分を表すものとする）．コーシーは複素平面を使っていないが，複素積分が複素平面上の曲線に沿う線積分として認識されたと我々には解釈できる．

分割の条件 (A.25) より，$\varphi(t), \chi(t)$ は $t_0 \le t \le T$ で単調増加でなければならないが，この不必要な制限は，コーシーが実関数の積分との類比で出発したことの名残りである．これが実際には不要であることに彼自身も注意している．

ところで上に述べた複素積分の定義に問題がないこと，すなわち，この積分値が $z_0 = x_0 + \sqrt{-1}y_0$ から $Z = X + \sqrt{-1}Y$ に至る積分路 C によらずに定まることを証明せねばならない．この事実は，正則関数についての「コーシーの積分定理」に他ならない．すでに詳しく触れたように，彼は 1814 年の論文で，いわゆるコーシー－リーマン方程式を二重積分することによって，これに相当する事実を証明しているが，線積分の概念が不鮮明であったために，この定理の意義の認識には至らなかった．しかし，今回は，定理の意義を把握し，変分法 (calculus of variations) を利用した，まったく違った証明を与えた．

コーシーは，(A.27) で与えられた任意の積分路 C に対し，

$$u(t_0) = u(T) = 0, \qquad v(t_0) = v(T) = 0$$

を満たす関数 $u(t), v(t)$ と微小な値 ϵ を用いて，積分路を

$$C':\ (x,y) = (\varphi(t) + \epsilon u(t), \chi(t) + \epsilon v(t)) \qquad (t_0 \le t \le T)$$

とずらす（図 A.4）[34]．これに対する積分値のずれの，オーダー ϵ の項は，

$$\epsilon \int_{t_0}^{T} \left\{ f'\left(x + \sqrt{-1}y\right)\left(\dot x + \sqrt{-1}\dot y\right)\left(u + \sqrt{-1}v\right) + f\left(x + \sqrt{-1}y\right)\left(\dot u + \sqrt{-1}\dot v\right) \right\}\mathrm{d}t \tag{A.29}$$

34 この図は我々が入れたものであり，コーシー自身のものではない．コーシーが 1825 年の時点で複素平面を理解していたかどうかは定かでない．[239] 参照．[336] の中にも [335] にも図は全くない．

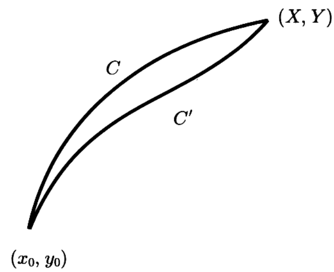


図 A.4　複素平面内の積分路の摂動.

となることに注意する．一方，部分積分により

$$\int_{t_0}^{T} f\left(x+\sqrt{-1}y\right)\left(\dot{u}+\sqrt{-1}\dot{v}\right)\mathrm{d}t = \Big[f(x+\sqrt{-1}y)(u+\sqrt{-1}v)\Big]_{t_0}^{T}$$
$$-\int_{t_0}^{T} f'\left(x+\sqrt{-1}y\right)\left(\dot{x}+\sqrt{-1}\dot{y}\right)\left(u+\sqrt{-1}v\right)\mathrm{d}t$$
$$= -\int_{t_0}^{T} f'\left(x+\sqrt{-1}y\right)\left(\dot{x}+\sqrt{-1}\dot{y}\right)\left(u+\sqrt{-1}v\right)\mathrm{d}t$$

であるから，(A.29) の値は 0 である．すなわち

$$\delta\int_{t_0}^{T} f\left(x+\sqrt{-1}y\right)\left(\dot{x}+\sqrt{-1}\dot{y}\right)\mathrm{d}t = 0.$$

したがって，$z_0 = x_0 + \sqrt{-1}y$ と $Z = X + \sqrt{-1}Y$ を結ぶ任意の曲線 C が，積分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ という汎関数[35]の極値曲線を与えることになるが，これは，この積分値が C によらず一定であることを意味する，というわけである．

以上の証明では，まず $f\left(\varphi(t)+\sqrt{-1}\chi(t)\right)$ の t についての微分可能性が，そして $\varphi(t), \chi(t), u(t), v(t)$ などの（区分的）連続微分可能性などが暗黙に仮定されているが，コーシーのこれに関する自覚は鮮明ではない．$f(x+\sqrt{-1}y)$ についての彼の仮定は，「有限かつ連続 (finie et continue)」であること，$\varphi(t), \chi(t)$ については，単に連続というのみである．微分可能性が不要だというのではない．「有限かつ連続」から微分可能性が演繹されているのである[36]．

35　汎関数 (functional, fonctionelle) という語は，後にアダマール (Jacques Hadamard, 1865–1963) が命名したものである．彼は 1902 年の段階 ([441]) ではまだ fonctions de lignes という言葉を使っているが，1903 年では fonctionelle という言葉を使っている ([442]).

36　このように，連続性がある程度までの微分可能性を含意するという信念は 19 世紀前半までのほとんどの数学者に共通していたことは，第 8 章で見たとおりである．アンペールの定理（第 8 章）が信じられていたことの傍証でもある．1823 年の段階 ([108]) でコーシーは微分可能性は必ずしも成り立つわけではないことを理解しているはずなのに，ここでは先祖返りしているようだ.

ともかく1825年の論文は，微分可能性を自明なものとして扱ってしまったため，関数の正則性の理解については，1814年の論文がコーシー－リーマン方程式の意義を強調していたことと比べると，大きく後退してしまった点に注意しておきたい．一方，理論的な基礎の不確かな変分法[37]を複素関数に適用したという点では，その先進性には脱帽せざるを得ないが，1814年に批判した「実から虚への移行＝代数的形式主義」への逆戻りの面さえある．史的展開は直線的発展ではないことがわかる．

A.4.2 積分公式の第2証明

積分定理を証明したコーシーは，次に関数 $f(t)$ が積分路

$$C : z = x + \sqrt{-1}y = \varphi(t) + \sqrt{-1}\chi(t), \qquad t_0 \leq t \leq T$$

上の，$t = \tau$ に対応する点 $z = \alpha = a + \sqrt{-1}b$ において，「無限になる (devenir infinie)」場合を考慮する．$z = \alpha$ が方程式

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

の根で，極限値 $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha_0)f(z)$ の値を f で表す，と述べていることから，彼が考えているのは

$$f(z) = \frac{\mathcal{F}(z)}{z-\alpha} \tag{A.30}$$

ただし，$\mathcal{F}(z)$ は，有限連続で，$\lim_{z\to\alpha}\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(\alpha) = \mathrm{f}$ という場合，現代流に言えば，$f(z)$ が $z = z_0$ で1位の極をもつ場合である．この設定下でコーシーがどのように，積分公式を導いたか，彼の意図を損なわない程度に単純化して紹介しよう．

コーシーはまず，特異点を積分路 $z = x(t) + \sqrt{-1}y(t)$ に沿った積分

$$A = \int_{t_0}^{T} \left(\dot{x} + \sqrt{-1}\dot{y}\right) f\left(x + \sqrt{-1}y\right) \mathrm{d}t \tag{A.31}$$

と，積分路を微小に

$$z = \left(x(t) + \sqrt{-1}y(t)\right) + \epsilon\left(u(t) + \sqrt{-1}v(t)\right)$$

とずらして，特異点を避けたときの積分の値

37 変分法はオイラーに始まりラグランジュによって体系付けられたものであるが，それが無限次元空間における微積分として厳密に定義されるのはずっと後のことである ([166, 126])．

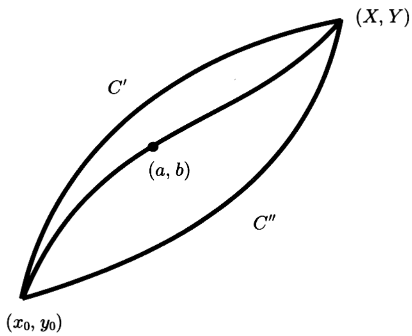


図 A.5　特異積分の積分路の変更.

$$A' = \int_{t_0}^{T} \left(\dot{x} + \epsilon\dot{u} + \sqrt{-1}(\dot{y} + \epsilon\dot{v})\right) f\left(x + \epsilon u + \sqrt{-1}(y + \epsilon v)\right) \mathrm{d}t \qquad \text{(A.32)}$$

の差を考える．前節で証明したことから，両者の値の違いに大きく影響するのは，点 α の付近，すなわち $t = \tau$ の近傍における積分だけである．そこでコーシーは，$\tau - \sqrt{\epsilon} \leq t \leq \tau + \sqrt{\epsilon}$ における積分同士を比較する．

さて，$z = \alpha$ の近傍では，

$$f(z) \approx \frac{\mathrm{f}}{z - \alpha}$$

と近似できるので，$t = \tau$ の近傍では，

$$\left(\dot{x} + \sqrt{-1}\dot{y}\right) f\left(x + \sqrt{-1}y\right) \approx \frac{\left(\dot{x}(\tau) + \sqrt{-1}\dot{y}(\tau)\right)\mathrm{f}}{x(t) + \sqrt{-1}y(t) - \left(x(\tau) + \sqrt{-1}y(\tau)\right)} \approx \frac{\mathrm{f}}{t - \tau}$$

と近似できる．また

$$\begin{aligned}
&\left\{\dot{x} + \epsilon\dot{u} + \sqrt{-1}(\dot{y} + \epsilon\dot{v})\right\} f\left(x + \epsilon u + \sqrt{-1}(y + \epsilon v)\right) \\
&\approx \frac{\left\{\dot{x}(\tau) + \epsilon\dot{u}(\tau) + \sqrt{-1}\left(\dot{y}(\tau)\right) + \epsilon\dot{v}(\tau)\right)\right\}\mathrm{f}}{x(t) + \epsilon u(t) + \sqrt{-1}(y(t) + \epsilon v(t)) - \left\{x(\tau) + \sqrt{-1}y(\tau)\right\}} \\
&\approx \frac{\left(\dot{x}(\tau) + \sqrt{-1}\dot{y}(\tau)\right)\mathrm{f}}{(t - \tau)\left(\dot{x}(\tau) + \sqrt{-1}\dot{y}(\tau)\right) + \epsilon\left(u(\tau) + \sqrt{-1}v(\tau)\right)} \\
&= \frac{\mathrm{f}}{t - \tau + \epsilon\dfrac{u(\tau) + \sqrt{-1}v(\tau)}{\dot{x}(\tau) + \sqrt{-1}\dot{y}(\tau)}}
\end{aligned}$$

と近似される．この最終式の分母における ϵ の係数を

$$\lambda + \sqrt{-1}\mu = \frac{u(\tau) + \sqrt{-1}v(\tau)}{\dot{x}(\tau) + \sqrt{-1}\dot{y}(\tau)} \tag{A.33}$$

とおくと，結局

$$A' - A \approx \int_{\tau-\sqrt{\epsilon}}^{\tau+\sqrt{\epsilon}} \frac{\mathrm{f}}{t - \tau + \epsilon(\lambda + i\mu)} \mathrm{d}t - \int_{\tau-\sqrt{\epsilon}}^{\tau+\sqrt{\epsilon}} \frac{\mathrm{f}}{t-\tau} \mathrm{d}t$$

が得られる．

積分変数を $t - \tau = \epsilon w$ によって t から w に変換すると

$$A' - A \approx \mathrm{f} \int_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}} \frac{\mathrm{d}w}{w + \lambda + \sqrt{-1}\mu} - \mathrm{f} \int_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}} \frac{\mathrm{d}w}{w} \tag{A.34}$$

となる．ここで右辺の第 2 項の積分は，被積分関数が積分区間内の点 $w = 0$ で特異性をもつので，このままでは不確定 (indéterminée) であるが，これをコーシーいうところの「特異積分の主値 (valeur principale)」：

$$\lim_{\eta \to +0} \left\{ \int_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{-\eta} \frac{dw}{w} + \int_{\eta}^{1/\sqrt{\epsilon}} \frac{dw}{w} \right\} = 0 \tag{A.35}$$

で置き換えると，(A.34) の右辺では，第 1 項のみが残り，

$$\begin{aligned} A' - A &= \mathrm{f} \left\{ \int_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}} \frac{(w+\lambda)}{(w+\lambda)^2 + \mu^2} \mathrm{d}w - \sqrt{-1} \int_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}} \frac{\mu}{(w+\lambda)^2 + \mu^2} \mathrm{d}w \right\} \\ &= \mathrm{f} \left\{ \left[\frac{1}{2} (\log(w+\lambda)^2 + \mu^2) \right]_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}} - \sqrt{-1} \left[\arctan \frac{w+\lambda}{\mu} \right]_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}} \right\} \\ &= \mathrm{f} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{(1/\sqrt{\epsilon} + \lambda)^2 + \mu^2}{(-1/\sqrt{\epsilon} + \lambda)^2 + \mu^2} \right. \\ &\qquad \left. - \sqrt{-1} \left(\arctan \frac{1/\sqrt{\epsilon} + \lambda}{\mu} - \arctan \frac{-1/\sqrt{\epsilon} + \lambda}{\mu} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる．

ここで $\epsilon \to +0$ の極限値をとれば，

$$A' - A = \mp \pi \sqrt{-1} \mathrm{f} \tag{A.36}$$

が得られる．右辺の複号は，μ の正・負に従うのだが，(A.33) より，μ の符号は $\dot{x}(\tau)v(\tau) - \dot{y}(\tau)u(\tau)$ の符号と一致する．したがって，$\mu > 0$ となるのは，曲線 C の点 $\alpha = x(\tau) + \sqrt{-1}y(\tau)$ における接ベクトル $(\dot{x}(\tau), \dot{y}(\tau))$ に対し，積分路のズレを方向づけるベクトル $(u(\tau), v(\tau))$ が左側にあること，したがって，新しい積分路

C' が，C に対して進行方向左に位置することを意味する．$\mu < 0$ の場合は右側にあることを意味する．

それゆえ，C に関して C' と反対側を通るもう一つの積分路 C'' に沿った積分値を A'' とおくと

$$A'' - A = \pm\pi\sqrt{-1}\mathrm{f}$$

となるから，これと (A.36) より

$$A'' - A' = \pm 2\pi\sqrt{-1}\mathrm{f} \tag{A.37}$$

が得られる

定数 f が $\mathrm{f} = \mathcal{F}(\alpha)$ あるいは，$\mathrm{f} = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$ であったことを考えれば，(A.37) は，コーシーの積分公式

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\Gamma \frac{\mathcal{F}(z)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z = \mathcal{F}(\alpha) \tag{A.38}$$

あるいは，

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Res}(\alpha) \tag{A.39}$$

に他ならない．ここで Γ は α を内部に含む領域の境界線である．

もちろん，この段階のコーシーは，**留数** (residue) という表現をまだ獲得していない．しかし，それに相当する値をひとつの文字 f で表したこと，そして，その値と極のまわりを一周する積分との関係を確立した意義は大きい．これについては，後で述べよう．

ところで，現代の我々の目から上述の証明が奇異に映るのは，コーシーが，特異点（極）を通過する積分を考えていることであろう．特異点を通る積分を考えているために，積分路 C, C' を（さしあたっては）C から ϵ 程度の隔たりの近傍にとらねばならず，その上で，積分区間：$t_0 \le t \le T$ は，τ の近傍：$\tau - \sqrt{\epsilon} \le t \le \tau + \sqrt{\epsilon}$ に限定するという，ご都合主義的手法に訴えることになっているのである[38]．しか

38 積分区間を，$t = \tau$ に関して対称な近傍に限定するといっても，その仕方はいろいろあり，ϵ と関係付けるにしても，任意の正の数 k に対して

$$\tau - \epsilon^k \le t \le \tau + \epsilon^k$$

という限定も可能なはずであるが，対応する w の変域

$$-\frac{1}{\epsilon^{1-k}} \le w \le \frac{1}{\epsilon^{1-k}}$$

が，$\epsilon \to +0$ で $-\infty < w < \infty$ となるのは，$0 < k < 1$ の場合に限る．コーシーは $k = 1/2$ を選んでいるが，その理由は説明していない．

し，特異点を通る積分については，特異積分の主値によって結局は無視されるのであるから，初めから特異点の両側を通過する積分の差 $A''-A'$ を考えれば良いはずだが，1825 年のコーシーは，この単純化に気づかなかったようだ．むしろ，[108] で定義した「特異積分の主値」の概念が有効であることを誇らしげに主張している．ただし，証明そのものについては，いくぶんかの不満もあったようで，続く節で別証を試みているが，それも完全ではない．

A.4.3 積分公式の拡張，留数定理の証明

1825 年論文の最大の前進は，高位の極に関して上の結果を拡張したことである．

$$f(z)=\frac{\mathcal{F}(z)}{(z-\alpha)^m} \qquad (\mathcal{F}(z):\text{有限連続},\ m\in\mathbb{N}) \tag{A.40}$$

に対し，α をはさむ 2 つの積分路

$$C':z=x+\epsilon u+\sqrt{-1}(y+\epsilon v), \qquad C'':z=x-\epsilon u+\sqrt{-1}(y-\epsilon v)$$

に対応する積分の値の差

$$\begin{aligned} A''-A' &= \int_{t_0}^{T}\left(\dot{x}-\epsilon\dot{u}+\sqrt{-1}(\dot{y}-\epsilon\dot{v})\right)\frac{\mathcal{F}\left(x-\epsilon u+\sqrt{-1}(y-\epsilon v)\right)}{\left\{x-a-\epsilon u+\sqrt{-1}(y-b-\epsilon v)\right\}^m}dt \\ &\quad -\int_{t_0}^{T}\left(\dot{x}+\epsilon\dot{u}+\sqrt{-1}(\dot{y}+\epsilon\dot{v})\right)\frac{\mathcal{F}\left(x+\epsilon u+\sqrt{-1}(y+\epsilon v)\right)}{\left\{x-a+\epsilon u+\sqrt{-1}(y-b+\epsilon v)\right\}^m}dt \end{aligned} \tag{A.41}$$

を考えるのだが，その際

$$\mathcal{F}(z)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\mathcal{F}^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k+(z-\alpha)^m w(z) \tag{A.42}$$

を用いると[39]，

$$\frac{\mathcal{F}^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}\cdot\frac{1}{z-\alpha}$$

の積分以外は，A' と A'' の分が打ち消しあうので，前節の結果を利用して，

$$A''-A'=\frac{\mathcal{F}^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}\cdot(\pm 2\pi\sqrt{-1}) \tag{A.43}$$

が得られる．コーシーは，右辺の $(\pm 2\pi\sqrt{-1})$ の係数を

---

39 ここでコーシーは，無自覚に，テイラーの定理を複素関数に適用している！

$$\mathrm{f} = \frac{\mathcal{F}^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \epsilon^{m-1}} \epsilon^m f(\alpha + \epsilon) \tag{A.44}$$

とおいているので，(A.43) は，$f(z)$ が $z = \alpha$ で m 位の極をもつときの，$z = \alpha$ のまわりを 1 周する積分路 Γ に対する留数定理に他ならない.

以上の議論は，閉積分路内に**複数の極**をもつ場合にも容易に拡張され，コーシー流に表現すれば,

$$A'' - A' = \pm 2\pi\sqrt{-1}(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \cdots) \tag{A.45}$$

現代風に表せば

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{z_k \in D} \mathrm{Res}(z_k) \qquad (\Gamma = \partial D) \tag{A.46}$$

が得られる.

A.4.4 実から虚への転向

コーシーの複素積分論の元々の動機は，厳密性の点で問題のある複素積分の形式的扱い（実から虚への移行）を，実の世界に引き戻して正当化することにあった．そのために，1814 年の論文では，意図的に複素積分を消去してしまったのである．ところが 1825 年になって一転，この立場を放棄し，我々が複素平面上の線積分と認識できるものを第一義的に打ち出すことになった．その最大の契機は，複素表現を通して初めて (A.45) のような事柄を簡潔に，したがって本質的に表現できる，という事実の発見であったに違いない．この「転向」が，複素関数論という新しい視野を拓いたことを考えれば，その歴史的意義は，極めて大きい.

伝統的な学問の規範からはみ出している新しい概念や方法が容認されるのは，その**論理的に厳密な定式化の完成によってではなく**，それを有意味的に語る理論の形成を通してであることは，数学史の多くの事例が物語っている．古くは，古典的な方程式の立場では無縁根として棄てられていた負の数が，いわゆる座標幾何を通じて，あるいは，静的な形式論理の立場からは明らかな矛盾をはらんでいた無限大・無限小が，微積分法を通じて，あるいはまた，「解析的表現をもたないがゆえに，数理解析の主題とはなり得ない」（ダランベール）と断定されていた不連続関数が，無限級数，とりわけフーリエ級数を通じて，それぞれ市民権を獲得してきたことは有名である．そして，複素関数論は，線積分と留数の理論を通して，独自の領域として自立するのである.

もっとも，コーシー自身がその意義をどこまで明確に把握していたかは，不明

である．1825 年の論文においても主要な定理を述べた後は，延々と積分への応用例（全集で 25 ページ！）が，そしてその後にはやや一般的な積分の計算公式が付録（6 ページ！）に付く，というありさまで，複素関数論固有の問題へと思索を深めていく様子は見られない．

以上がコーシーの理論の芽生えの部分である．コーシーが書いた文章に忠実ではなく，かなり現代的な翻訳が入っているものの，コーシーのアイデア自体は現代の複素関数論に共通するものがあることをご理解いただけるものと思う．コーシーがいつ頃複素平面を使うようになったのかは，専門家の間でも意見が分かれるようである．しかし，少なくとも 1814 年の時点では複素平面は頭になかったはずである．1825 年の論文でも複素平面を認めていると明確に確認できる記述は見当たらない．関数論の研究を再開する 1840 年以降になって，べき級数展開の可能性，あるいは正則性，といった最も基本的な概念を確立するのだが，極以外の特異点（分岐点）の研究については，問題の所在に気づきつつも，ピュイゾ[40]やリーマン[41]に譲ることになる．1825 年以降の発展については [96, 239] を参照していただきたい．

表 A.1 複素数に関連するできごと

1545	カルダノが虚数に出くわす
1572	ボンベッリが虚数を使って三次方程式を解いた
1637	デカルトが「空想上の」という言葉で $\sqrt{-1}$ を呼んだ
1685	ウォリスが虚数を幾何学的に意味付けようとして，結局失敗
1748	オイラーの公式 $e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ 現る [137]
1794	オイラーが $\sqrt{-1}$ を i で表す
1799	ウェッセルによる複素数の幾何学化
1806	アルガンによる複素数の幾何学化
1813	アルガンの理論の要約が *Annales de Math.* に載る
1814	コーシーの複素積分の第一論文提出
1825	コーシーの複素積分の第二論文出版
1827	コーシーの複素積分の第一論文出版
1831	ガウスによる複素数という名前の導入 [422]
1837	実数のペアによる複素数の定義（ハミルトン）[446]
1847	コーシーによる複素数の定義 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ [340]

40 Victor Alexandre Puiseux (1820-1883).
41 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

＊　＊　＊

演習問題

[問題 1] ✿ カルダノの公式 (A.1) に $p = 6, q = 2$ を当てはめてみよ．この方程式の根はすべて実数であることを確認せよ．

[問題 2] ✿✿ $x^3 = px + q \quad (p, q$ は実定数) において，

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \leq 0$$

は，3 根がすべて実数となるための必要十分条件であることを証明せよ．

[問題 3] ✿ (A.3) を使って $\tan 4x$ を $\tan x$ を用いて表せ．

[問題 4] ✿✿ 留数定理を使うと多くの定積分が鮮やかに計算されることはよく知られている．

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}.$$

を証明せよ．ただし，$-1 < \alpha < 1$ とする．

[問題 5] ✿ 複素解析の面白い問題が詰まっているので [208] を読むことをお勧めする．

[問題 6] ✿ $\beta > 0$ に対して

$$\Phi(\beta) = e^{\beta^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2\beta x\,\mathrm{d}x$$

とおき，

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2\beta x\,\mathrm{d}x = e^{-\beta^2} \int_0^\beta e^{y^2}\,dy$$

を初等的に証明せよ．

[問題 7] ✿ $0 < \alpha, \beta < 1$ に対して次式を証明せよ．

$$\int_\beta^1 \int_\alpha^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} - \arctan\alpha - \arctan\frac{1}{\beta} + \arctan\frac{\alpha}{\beta}$$

[問題 8] ✿ [340] を読んで，コーシーが複素数の新しい定義にたどり着いていることを確認せよ．

B　常微分方程式

[91] の 8 章，[153]，および [285] を元に，常微分方程式の歴史を解説する．[156, 157] にも常微分方程式の歴史的な記述があり，役立つのであるが，現代的な見方と歴史的事実がごちゃ混ぜになっているので危険である．[156, 157] を読むときには注意する必要がある．

B.1　初期の微分方程式

微分方程式はニュートンが発見したものだと言われている．それは正しいことであるが，ニュートンは微分方程式を力学のためにあみ出したわけではないことには注意すべきである．確かに流率方程式を使ってはいるが，曲線の幾何学のために使っているのである ([36, 285, 610])．運動方程式ですら，我々の知っているものはオイラーによるものであって，ニュートンは力学の創始者かもしれないが，力学系 (dynamical systems) の創始者とは言いにくい．その後，微分方程式の求積法は主としてライプニッツ学派の中で進歩することになる．これは無理のないことで，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x)G(y)$$

を変数分離して

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{G(y)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{F(x)}$$

などというのは流率法の記号ではできかねるものである．ライプニッツやヤコブおよびヨハン・ベルヌーイは微分方程式を本格的に使い，力学への応用もめざましく発展した．17 世紀後半から 18 世紀初めの彼らの時代には微分方程式を求積法で解くということが究極の目標であったと見え，また，それが可能であると信じていたようでもある．

テイラー [253] も微分方程式を使っている．そして彼自身が発見したテイラー級数が微分方程式の冪級数解法に適用できることは彼の理論のメリットでもあった ([401])．この頃，すでに求積法で解けない微分方程式があることは研究者の間では認識されていた．たとえばリッカチの微分方程式（[571]，1724 年）は有名であるし，テイラーがテイラー級数の応用として非線形微分方程式 $(x + ay)y'' =$

$(1+y')y'$ を解いている（a は定数，[253]，1717 年）．

1724 年，リッカチ [571] は微分方程式を積分することは一般には難しいことを注意し，積分できる方程式と積分できない方程式はどう区別されるのか，と問題を提起する．彼の論文は数学的な内容は貧弱であるが，その一番最後のところで，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{u^2}{x^n}=nx^{m+n-1}$$

という微分方程式を挙げ，どのような m,n についてこの微分方程式が（求積法で）解けるか，という問題を挙げている．彼の論文は問題を提出したところで終わっているが，リッカチの論文の次のページからダニエル・ベルヌーイがこれを取り上げ（[268] の 1-3 ページ），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u^2=x^n \tag{B.1}$$

は，一般の n については求積法では解けない問題であると述べている．さらに，$n=-4m/(2m\pm 1)$（m は整数）の場合には求積法で解が求められることをその 1 年後に発表している（[301]）．その証明は [121] の 65 ページあるいは [141] の 437 節を見よ．

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+x^2 \tag{B.2}$$

は求積法では解けない．しかし，2 階の線形方程式に帰着させることができる．線形方程式ならばべき級数で簡単に解けるから，これを用いて解の表示ができる[1]．

オイラーは

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u^2=x^2+1 \tag{B.3}$$

が求積法で解けることを見つけた（[141] の 531 節）．さらに彼は，A_j を定数とするとき，

$$A_0y+A_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+A_2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+A_3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+\cdots+A_N\frac{\mathrm{d}^Ny}{\mathrm{d}x^N}=0$$

を考え，N 次方程式 $A_0+A_1\lambda+A_2\lambda^2+A_3\lambda^3+\cdots+A_N\lambda^N=0$ の根を用いて $y=e^{\lambda x}$ およびそれらの線形結合で表されるものが解になることに気づいた（[141] の第二巻第 2 章）．すべての根が単根であればこれで解は尽くされる．重根の場合には x の多項式 $\times\, e^{\lambda x}$ という関数を用いればすべての解を得ることができる．これ

1 ヤコブ・ベルヌーイ，1702 年，[268]．

は線形微分方程式の基本中の基本であり，今でも大学で必ず習うことになっているが，その起源はオイラーにある．

B.2 コーシーとペアノ

数学には存在定理というものがたくさんある．歴史的に最も古い存在定理はユークリッドによる無限に多くの素数の存在定理と言ってよかろうが，解析学で最も古い存在定理はコーシーによる常微分方程式の初期値問題の解の存在定理であるという人もある．たとえば，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t,u), \qquad u(0) = u_0 \tag{B.4}$$

において f および f_u が連続ならば，t の関数 u が一意に存在するというのが彼の定理である．これが 1824 年のことであるが，その後彼のノートは歴史の舞台から消えてしまい，20 世紀後半に発見されるまで忘れられていた ([109])．コーシーの証明は差分法で近似解を構成し，その中から収束する部分列を取り出してその収束先が解になることを示している点でユニークである．数値解析の方法が存在定理に昇華しているのがコーシーの特徴でもある．差分法を使って解の存在を証明するというやり方は現在でも偏微分方程式の解の存在を示すときに使われることがあるが，その起源はコーシーにあった．

リプシッツ [513] は f が C^1 級でなくともリプシッツ連続 $|f(t,u) - f(t,v)| \leq M|u-v|$ であれば十分であることを示した．彼の論文では絶対値 $|u|$ を $[u]$ と書いている．この頃にはまだ絶対値の記号 $|\ \ |$ は定着していなかったようだ．

ペアノ[2]は解の存在のためには f が連続であれば十分であることに気づいた．1886 年のことである ([553, 554])．ペアノは [553] においてスカラーの常微分方程式に対して解の存在を証明した．ここで彼は劣解と優解を使っており，20 世紀の偏微分方程式論を先取りしたようなところがあって，大変面白い．常微分方程式系については別の証明法が必要となる．これは彼の論文 [554] で証明が与えられている．ただし，この論文は彼独特の記号で公理的に書かれているので読めない．Mie[527] がその方法を解説しているのでそれを読めばわかる．

定理 B.1 (ペアノの定理) ある $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ が存在して，f は $0 \leq t \leq \delta_1, |u-u_0| \leq \delta_2$ で連続であるとする．このとき，ある $T_1 \in (0,\delta_1]$ が存在し

2 Giuseppe Peano (1858-1932).

て，(B.4) の解が少なくともひとつ $0 \leq t \leq T_1$ で存在する．

ペアノの定理の仮定だけでは，一意性は一般に成り立たない．たとえば，$\alpha \in (0,1)$ を定数として $f(t,u) = |u|^\alpha$ を考えればわかる．$t_0 \geq 0$ を任意とし，

$$u(t) \equiv 0 \quad (0 \leq t \leq t_0), \qquad u(t) = [(1-\alpha)(t-t_0)]^{1/(1-\alpha)} \quad (t_0 \leq t)$$

とすると，これはすべて $u(0) = 0$ を満たす C^1 級の解となる．したがって，ひとつの初期値に対して無限個の解が存在する．

時間に依存しない常微分方程式の初期値問題

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u), \qquad u(0) = u_0$$

を考えよう．解の一意性を考えるとき，もしも $f(u_0) \neq 0$ ならば解は一意である．f に関する条件は連続性のみでよい．たとえば $f(u_0) > 0$ ならば解は $t = 0$ の近傍で単調増加であり，t を u の関数と見なすことができる．

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{f(u)}, \qquad t(u_0) = 0$$

この解は明らかに

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s$$

と一意に決まる．上記の一意性の反例は $f(u_0) = 0$ のときにのみ起きるわけである．

コーシーの定理は無限次元でも成り立つ．つまり次の定理が成り立つ．

定理 B.2　X をバナッハ空間とし $f : [0,T] \times X \to X$ がリプシッツ連続であるとする．つまり，正定数 K が存在して任意の $x \in X, y \in X, t \in [0,T]$ について $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x-y\|$ が成り立つと仮定する．このとき任意の $u_0 \in X$ に対して $u(0) = u_0$ と $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t,u(t))$ を満たす 0 の近傍で定義され，X に値をとる C^1 級関数 u が存在して一意である．

しかし，ペアノの定理は無限次元では成り立たない．これに初めて気づいたのはデュドンネ [363] であろう．彼はバナッハ空間 c_0（ゼロに収束する実数列全体）においてペアノの定理が成り立たないような f の例を構成した．その後，ヨーク [633] とゴドゥノフ [435] が互いに独立に，同様の例をヒルベルト空間でも構成できることを示した．その後の発展については [592] を見よ．

結局，リプシッツ条件[3]は存在のためには必要でないことになったわけであるが，一意性を言うには f に何らかの条件が必要になる．リプシッツ条件は十分条件であるが，一意性のためにも必要とは言えない．これは 1898 年，オスグッドによって示された（[550] の 344-345 ページ）．

定理 B.3（オスグッドの定理） $\varphi(0)=0$ を満たす単調増加関数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在し，ある $\delta>0$ が存在して

$$\int_0^\delta \frac{\mathrm{d}s}{\varphi(s)}=\infty$$

なるものとする．f は

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le\varphi(|x-y|)$$

を満たすものとする．このとき，$\dot{x}=f(t,x)\quad x(0)=x_0$ の解がただ一つ存在する．

c が定数で $\varphi(s)\equiv cs$ ならばリプシッツの結果になる．原点の近くで $\varphi(s)=-s\log s$ であってもオスグッドの定理を満たすから，オスグッドの定理はリプシッツの定理の一般化になっている．オスグッドの条件は決してお遊びのものではなく，二次元オイラー方程式の解の存在を証明するときに役に立つ ([16])．

タマルキン [607] は，$0\le t\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ において

$$|f(t,y)-f(t,z)|\ge\psi(|y-z|) \tag{B.5}$$

を満たす関数 f を考えた．ここで，$\psi=\psi(r)$ は $0\le r\le 1$ で定義された関数で，$0<r$ で $\psi(r)>0$ となる単調増加関数で，

$$\int_0^\epsilon \frac{\mathrm{d}r}{\psi(r)}<\infty$$

を満たすものである．たとえば $\psi(r)=r^\alpha$（ただし $0<\alpha<1$ は定数）でよい．このとき彼はすべての初期値に対して解が二つ以上あることを主張している．残念なことに (B.5) を満たす関数は存在しない．こうした欠点はあるものの，彼の論文には，上で述べたオスグッドの条件のもとで解の一意性を再発見しているなど，見所もある．$0\le t\le 1, 0\le u\le 1$ で定義された連続関数 $f=f(t,x)$ で，任意の $0<t_0<1, 0<u_0<1$ に対し，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(t,u), u(t_0)=u_0$ の解が少なくとも二つ存

3 リプシッツ条件はリプシッツがフーリエ級数の収束のための十分条件として導入したのであって（第 II 部第 7 章）そのときには常微分方程式とは関係がなかった．

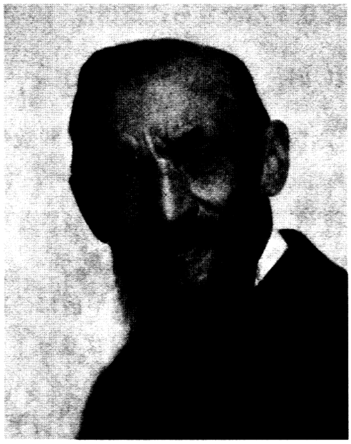


図 **B.1** ペアノ（ペアノ全集（[552]）より）.

在するような例を作ることは決して易しいことではない[4].

B.3 南雲道夫の定理

リプシッツの定理は南雲道夫[5]によって別の形に拡張された ([538]).

定理 B.4 (南雲の一意性定理) $0 \le t \le T_0, |u-u_0| \le U_0$ で定義された連続関数 $f=f(t,u)$ が,

$$|f(t,u)-f(t,v)| < \frac{|u-v|}{t} \tag{B.6}$$

を満たしていると仮定する．このとき，$u(0)=u_0$ の解はただひとつである.

南雲は次の例を考えた：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{ct^3u}{t^4+u^2} \tag{B.7}$$

$-1 \le c \le 1$ ならば定理の条件を満たす（章末演習問題)．$c=4$ とすると，解の一意性は成り立たない．従って (B.6) をどこまで緩めることができるか，という問題が残る.

南雲の定理を受けてペロン[6]は [559] でいくつかの補足をする．彼は (B.6) にお

4 実際，定理 B.2 の直前に示したように，f が t に依存しなければそういう関数にはならない．ラフレンチェフ [502] はそういう関数 $f(t,u)$ を構成したが，その構成は恐ろしく複雑である.

5 1905-1995，大阪大学・上智大学教授.

6 Oskar Perron (1880-1975).

ける $<$ は $\leq$ でよいことに注意する．さらに彼は，

$$|f(t,u)-f(t,v)|<(1+\epsilon)\frac{|u-v|}{t} \tag{B.8}$$

を満たすけれども，解の一意性が成り立たない連続関数を構成した．ペロンの例は章末演習問題 5 を見よ．

ペロンは南雲の定理について「この驚くべき単純さと美しさを見ると，なぜとっくの昔に証明されていなかったのかと不思議に思う.」と述べているが，これは敬意の表れであろう．実際には，南雲よりも 17 年前に，南雲の定理と似たような，しかし，より制限の強い条件のもとでローゼンブラット [577] が一意存在を示している．ただし，彼は一意性を証明したつもりになっているが，実際は存在しか証明していない（逐次近似解の一意性が示されているだけである）．彼は次の形で解の一意性を主張している．

定理 B.5 f の連続性は仮定する．さらに，

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leq ct^{-\alpha}|u-v|$$

（ここで，正定数 c は任意．定数 α は $0<\alpha<1$ を満たすものとする.）あるいは，

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leq ct^{-1}|u-v|$$

（ここで，c は $0<c<1$ を満たす定数）という条件下で，解はただひとつしか存在しない．

南雲道夫 [539] は定理 B.4 を高階微分方程式に拡張し，

$$\mathrm{d}^n u/\mathrm{d}t^n = f\left(t,u,u',u'',\cdots,u^{(n-1)}\right) \tag{B.9}$$

を考えた $(n>1)$．これは，ベクトル値関数 $(u,u',u'',\ \cdots,u^{(n-1)})$ について書き直してみればわかるように，f のリプシッツ定数が t^{-1} の特異性を持ってもよい．南雲はしかし，実際にはより強く，次の定理を証明している．

定理 B.6

$$\begin{aligned}&|f(t,u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})-f(t,v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{n-1})|\\&\quad\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(n-k)!}{t^{n-k}}|u_k-v_k|\end{aligned}$$

を仮定すれば (B.9) の解の一意性が成り立つ．ここで a_k は非負定数で

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq 1$$

を満たしているものとする．

ウィントナー [631] は，南雲の定理の特殊な場合を再発見している．さらなる一般化については，[286] や [345] を見よ．

B.3.1 逐次近似法

常微分方程式の解の存在定理に対するコーシーの証明もペアノの証明も現在ではあまり使われない．現在では逐次近似法を使うことが多いからである．では誰がいつごろ逐次近似法を使い始めたのであろうか？ これについてはいくつかの言説が存在しているので，そのあたりをきちんと見ておくことにしよう．

リューヴィル[7]は 1837 年の論文 [511] において，今日ではストゥルム－リューヴィル問題と呼ばれている固有値問題

$$\begin{aligned}(p(x)u'(x))' =& (q(x) - \lambda r(x))u(x) \qquad (a \leq x \leq b), \\ & u'(a) - hu(a) = 0, \quad u'(b) + Hu(b) = 0\end{aligned}$$

を考えた．ここで，境界条件の h, H は正定数である．こうした 2 階線形の方程式に制限した形ではあるけれども，彼は逐次近似法で解の存在が証明できることをはっきりと認識している．

バーコフは [91] の 243 ページにおいて

> モアニョ師は，2 階の常微分方程式に対してこの方法（つまり逐次近似法．訳注）を記述している．従ってコーシーもおそらく（逐次近似法を）よく知っていたのであろう．

ここでモアニョ (Moigno) とは [206] のことである．これだけ読んでいるとコーシーも逐次近似法による解の存在証明を知っていたかと思われるかもしれない．実際，バーコフよりも数十年昔にパンルベ [551] が「コーシーも逐次近似法を使っていた」と書いているからバーコフはこれを踏襲したのかもしれない．しかし，使っていたといっても存在証明に使えると意識してはいなかったようである（[109] の注意 LI-LIII)．つまりコーシーは，逐次近似を解の近似法としてのみ認識し，存

7 Joseph Liouville (1809-1882).

在定理に使うという発想はなかったようである．現代の我々とはまったく逆である．

さらに時代は下って，任意次数の線形常微分方程式の解の存在が逐次近似法で証明できることをペアノが証明している．しかしながら，一般の非線形常微分方程式でも逐次近似法で解の存在が証明できることを示したのは 1890 年のピカール [560, 561] が最初であろう．ケネディー [174] によれば，ペアノは逐次近似法による解の存在証明としてはピカールよりも自分の方が早いといって不服であったらしいけれども，一般論を非線形の場合に展開したわけではなく，また，線形の場合にはリューヴィルの結果があるわけであるから，彼に先取権があるということにはならないであろう．やはり，逐次近似法はピカールの逐次近似法なのである ([174]).

* * *

演習問題

[問題 1] ✿ 次の微分方程式が求積法で解けることを示せ．

$$\frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)u$$

ここで，P と Q は与えられた x の関数である．

[問題 2] ✿ 次の微分方程式が求積法で解けることを示せ．

$$\frac{du}{dx} = Q(x)u + R(x)u^2$$

ここで，Q と R は与えられた x の関数である．

[問題 3] ✿ (B.3) は求積法で解けることを示せ．

[問題 4] ✿ $u = -y'/y$ とおくことによって，ヤコブ・ベルヌーイの例 (B.2) が y の 2 階線形方程式に帰着されることを証明せよ．

[問題 5] ✿ 次の微分方程式はエアリー[8]の微分方程式と呼ばれる．

$$y''(x) - xy(x) = 0.$$

x の関数 f を

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^M \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

で定義すると，これはエアリーの微分方程式を満たすことを証明せよ．[261].

[問題 6] ✿ $n \neq 0, x \neq 0$ に対して

$$y(x) = \int_0^\infty \exp\left(-t^n - \frac{x^n}{t^n}\right) dt$$

8 George Biddell Airy (1801-1892).

とおくと，y は $y'' = n^2x^{n-2}y$ を満たすことを証明せよ．これを用いて (B.1) を解け（この方法はポアソン [562] による）．

[問題 7] ✿ $-1 \leq c \leq 1$ ならば (B.7) は条件 (B.6) を満たすことを証明せよ．$c > 2$ のときに解の一意性が成り立たないことを例示せよ．

[問題 8] ✿ $\epsilon > 0$ とし，

$$f(t,u) = \begin{cases} (1+\epsilon)t^{\epsilon} & (t^{1+\epsilon} \leq u) \\ (1+\epsilon)\frac{u}{t} & (0 < u < t^{1+\epsilon}) \\ 0 & (u \leq 0) \end{cases}$$

とおくと，(B.8) は満たされる．しかし，解の一意性は成り立たない．これを証明せよ．

[問題 9] ✿ ローゼンブラットの定理 B.5 を証明せよ．

[問題 10] ✿ $u \leq 0$ で $f(u) = 1$，$u > 0$ で $f(u) = -1$ という不連続関数を考える．このとき $\dot{u} = f(u)$，$u(0) = 0$ という初期値問題は解を持たないことを証明せよ．

[問題 11] ✿✿ 条件 (B.5) を満たす関数は存在しないことを証明せよ．

[問題 12] ✿ 1758 年，オイラーは [381] において，次の問題を解いている．「平面内の曲線で，その任意の点における接線と原点との距離がその点の位置によらず一定であるものは何か？」この性質を満たす曲線は直線もしくは原点を中心とする円であることを証明せよ．

C ギブズ現象

C.1 ギブズ現象小史

ギブズ現象の歴史については [463] が詳しい．これによると，ギブズ現象に最初に気づいたのはウィルブラハムである．ウィルブラハム [630] は 1848 年に

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \&c$$

を考え，図 C.1 を得た．ギブズ現象を直感的に把握していたと言ってよいであろう．しかし，彼は一様収束という概念を持っていなかったため，$x = \pm\pi/2$ を含む無限小の区間で振動が起きていると理解している．ストークスやザイデルが一様収束の概念に肉薄していたのと同じ頃である．残念ながらウィルブラハムの研究はその後忘れ去られてしまった．

その 50 年後，マイケルソン[1]が雑誌ネイチャーに投稿した短い文章 [526] がギブズ現象に関する論争を引き起こす．彼はフーリエ級数という連続な関数が不連続な関数を表現することは物理学者の理解を超えている，と嘆いている．彼の主張は理解しづらいところがあるが，単純収束と一様収束がごちゃごちゃになっているのは間違いなかろう．これに対してイギリス人のラブ[2]が反論し，各点収束の意味を説

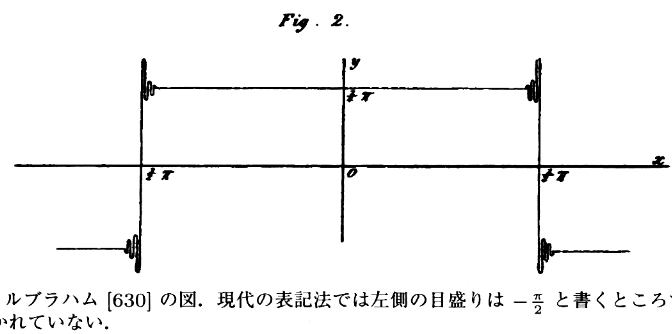


図 C.1　ウィルブラハム [630] の図．現代の表記法では左側の目盛りは $-\frac{\pi}{2}$ と書くところであるが，ここでは − は書かれていない．

1　Albert Abraham Michelson (1852-1931)．光速度を測定したマイケルソン－モーリーの実験で名高い．

2　A.E.H. Love (1863-1940).

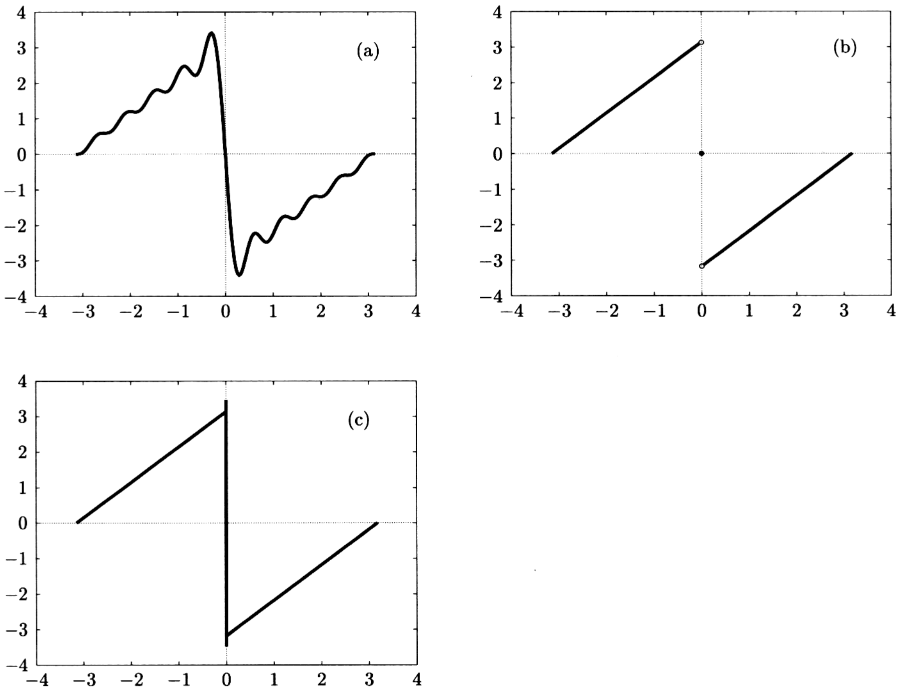


図 **C.2**　ギブズ現象．有限和 (a) で $N \to \infty$ としたとき，マイケルソンは (c) のようなイメージを持ち，ラブは (b) を主張するので，論争はかみ合わない．ギブズはマイケルソンが (c) のようなイメージを抱くのはある意味で自然であると主張しているようにも見える．

明している．彼の説明はまったく正しいのだが，マイケルソンはそれでは納得しない．ここで，ギブズ[3]が間に割って入り，マイケルソンに同情的な説明を展開する．結局，問題となるのは，不連続関数に収束する部分和

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{N}\sin Nx$$

の各点における収束と，この関数の表すグラフの幾何学的な極限が一致しないことが物理的直感に反するのである．

結局，ギブズ現象をめぐる歴史に名高いこの論争は，不毛とは言わないまでも，まったくかみ合っていないのである．正しい定義を指摘するだけでは現象の理解に到達しないことの典型例である．新しい概念が定着するには思いの外長い時間がかかる．数学の教師はこのことを肝に銘ずべきであろう．

3　Josiah Willard Gibbs (1839–1903)．ギブズを最も有名にしているのは多分彼の統計力学における業績であろう．しかし，彼のベクトル解析における業績もきわめて重要である ([114])．

C.2 ギブズ現象を回避するには

ギブズ現象があるから，フーリエ級数は不連続関数には役立たない，というのは早計に過ぎる．適当に補間すると役立つこともある．以下に述べる方法は原始的ではあるが，数値計算の現場ではしばしば用いられるものである．

本当にややこしい不連続関数のフーリエ級数表示は無理として諦めよう．しかし，応用に現れる不連続関数は第一種不連続であることも多い．つまり，たとえば $-\pi \leq x < 0$ で $f_0(x) = x + \pi$, $0 < x < \pi$ で $f_0(x) = x - \pi$ といった類いである．この f_0 は不連続であるが，簡単な表示式を持っているから，計算は簡単である．一般に，関数 f が $x = \xi$ において第一種不連続で，その「跳び」が η であるならば $f(x) = \eta f_0(x - \xi) + g(x)$ によって関数 g を定めると，g は ξ における不連続性を持たない．他にも不連続点があれば，

$$f(x) = \eta f_0(x - \xi) + \eta_1 f_0(x - \xi_1) + \cdots + \eta_k f_0(x - \xi_k) + g(x)$$

で g を定義する．この g は連続であるから，そのフーリエ級数はそれほど悪いものでは無かろう．これがアイデアである．必要ならば導関数の跳びも補間することにより，g を C^1 級にすることも可能であろう．こうした方策でフーリエ級数の有用性が劇的に上がることもある．

* * *

演習問題

[問題 1] ✿✿✿ (7.4) の右辺を $f(x)$ とし，そのフーリエ級数を N 項で打ち切った有限フーリエ級数を $S_N(x)$ とする．すべての x で $\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$ であるが，

$$\lim_{N\to\infty} \sup_x |S_N - f| = c_0 > 0$$

であることを証明せよ．c_0 を求めよ．

D　様々な定理

D.1　ワイエルシュトラスの定理の周辺

ワイエルシュトラスの定理は次の形にすれば多次元でも正しい：

定理 D.1　Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界開集合とし，f を $\overline{\Omega}$ で連続な実数値関数とする．任意の $\epsilon > 0$ に対し，多項式

$$p(x) = p(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{k_N=0}^{m_N} c_{k_1,k_2,\cdots,k_N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N}$$

が存在して

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

複素平面の領域を Ω とし，$\overline{\Omega}$ で連続な関数 $f(z)$ が与えられたとき，$\overline{\Omega}$ で f をいくらでも近似する $z = x + \mathrm{i}y$ の複素係数多項式関数をとることはできない．正則関数の一様収束先はやはり正則であるからである．では，$\overline{\Omega}$ を含むある領域で解析的な関数 $f = f(z)$ が与えられているものとする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z) - p(z)| < \epsilon$$

となるような $z = x + \mathrm{i}y$ の多項式がとれるであろうか？ 一般には不可能である．Ω が単連結ならば正しい（ルンゲの定理，[119, 146]）．単連結でないと反例が簡単に作れる．たとえば，$f(z) = 1/z$ を領域 $1/2 < |z| < 2$ で考えてみよう．これが多項式 $p(z)$ で ϵ 近似できるならば，特に，$|f(z) - p(z)| < \epsilon$ が，$|z| = 1$ を満たすすべての z について成立する．ゆえに

$$\left| \int_{|z|=1} [f(z) - p(z)]\, \mathrm{d}z \right| \le \int_{|z|=1} |f(z) - p(z)|\, |\mathrm{d}z| \le 2\pi\epsilon.$$

しかし，この複素積分は $2\pi\sqrt{-1}$ に等しいから，これは ϵ が任意にとれることと矛盾する．

D.2 メンショフの定理

一般の三角級数で表すことができる関数の範囲は極めて広い．これを如実に示すのがメンショフの定理である．これは 1941 年に発表された定理である ([521])．

定理 D.2 f を $[-\pi,\pi]$ で定義された実数値関数で，ほとんど至るところ有限値をとるものと仮定する．このとき三角級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

で，$[-\pi,\pi]$ 上ほとんど至るところ $f(x)$ に収束するものが存在する．

この定理の証明は [521] もしくは [77] の第 2 巻 418-431 ページを見よ．

D.3 マズルキェヴィッチの定理の証明

定義 D.1 (X,d) を距離空間とする．$A\subset X$ が第 1 カテゴリーであるとは，内点を持たない閉集合の可算個の和で覆われることである．第 1 カテゴリーでないとき第 2 カテゴリーであると呼ぶ．

定理 D.3 完備な距離空間は第 2 カテゴリーである．

証明は，[274] あるいは [214] の 41 ページ，[92] の 64 ページを見よ．この定理により，バナッハ空間の中では，ある集合の補集合が第 1 カテゴリーであるならばその集合は第 2 カテゴリーであることがわかる．

定理 D.4 (マズルキェヴィッチの定理) 区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体を $C[0,1]$ とし，$\|f\|=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|$ によってバナッハ空間とする．

$$A=\{f\in C[0,1]\ ;$$
$$\text{すべての } x\in[0,1) \text{ において } f \text{ は有限な右微係数を持たない}\}$$

とおくと，A は第 2 カテゴリーである．

証明はバナッハ [293] もしくは [214] を見よ．

この定理では微係数として有限なもののみを許しているが，$\pm\infty$ の微係数を許

しても次の定理が成り立つ.

定理 D.5

$$D = \{f \in C[0,1]\ ;\ \exists x \in (0,1) \text{ において } f \text{ は } \pm\infty \text{ を許して微係数を持つ}\}$$

とおくと，D は第 1 カテゴリーである.

証明はほとんど同じである ([585]).

カテゴリーと測度に関する [214] は大変面白い教科書であるので，一読されることをお勧めする.

D.4 項別積分について

第 II 部の (6.1) から (6.2) を形式的に導くのは簡単である. (6.1) に $\cos mx$ をかけて項別に積分すればよい.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\mathrm{d}x \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]\cos mx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\mathrm{d}x \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\cos mx\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x = 0$$

(ただし左側の式で $m = n = 0$ のときには π ではなく 2π) を用いると (6.2) の a_m の式を得る. b_m についても同様である. したがって形式的には (6.2) は簡単に検証できるけれども，問題は上の式で $\int_{-\pi}^{\pi}$ と $\sum_{n=1}^{\infty}$ の順序交換を行っていることである. これはどんな関数でも正しいのであろうか.

問題は次のように書き換えることができる：$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，区間 $[a,b]$ で定義された関数列とし，各 x で有限な値 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ が確定するものと仮定する. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x \tag{D.1}$$

は正しいであろうか？ あるいは，次のように言い換えてもよい：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $[a,b]$ で定義された関数列とし，すべての x で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が存在するものと仮定する．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{D.2}$$

は正しいであろうか？

これはいつも正しいとは限らない．実際，反例はいくらでも作ることができる[1]．

例 D.1

$$u_n(x) = -2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}$$

とおく．すべての実数 x で $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -2xe^{-x^2}$ は明らかである．しかし，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-n^2x^2} - e^{-(n+1)^2x^2}\right]\Big|_0^1 = e^{-1},$$

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = -2\int_0^1 xe^{-x^2}\mathrm{d}x = e^{-1} - 1$$

となり，両者は等しくない．

これはダルブー [355] の 84 ページにある．

例 D.2 区間 $[0,1]$ の中のすべての有理数を適当に並べて $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ とし，関数 $f_n(x)$ を次のように定義する．

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \exists m \le n \quad x = r_m \\ 0 & \text{その他の } x \end{cases}$$

f_n は有限個の点でのみ 1 をとるからその積分はゼロである．しかし，その極限は有名なディリクレの関数（それは [364] において初めて導入された）で，リーマン積分できない．つまり (D.2) の右辺が意味を持たない．

---

1 関連する話題として，ストークスの例（第 II 部第 5 章の章末問題17）も思い出していただきたい．

こうした状況は大変不便である．もちろん，関数列が一様収束すれば積分と無限和の順序交換は可能であるが，(D.2) のような自然な等式はできるだけ広い関数のクラスについて成立するべきである．一様収束なものに議論を限っていては応用に支障をきたす．実際，一様収束は十分条件であって，必要条件からは程遠いのである．こうした欲求に応えるにはリーマン積分では不十分であり，ルベーグ積分を用いて初めて満足すべき状況に至る．例 D.2 の関数列の例は，積分をルベーグ積分の意味に解釈すれば $0=0$ という正しい等式を与えることがわかる．

D.5 微積分学の基本定理

微分して積分すれば元に戻る，というのが微積分学の基本定理である．

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,\mathrm{d}y$$

がその内容である．f' が連続ならばこれは正しいが，f' に対する条件はどれくらい緩められるのであろうか？ ヴォルテラ[2]は，ある区間のすべての点で微分可能であり，その導関数は有界であるが，その導関数はリーマン可積分でないという関数が存在することを示した（[621]，1881 年）．証明は吉田洋一 [65] を見よ．

D.6 楕円の周長

楕円の面積は古くから知られていたがその周の長さを計算することは一大事であった．オイラーは楕円の周長の計算に何度も挑戦している．長軸 a, 短軸 b の楕円の周の長さを L とする．L は a, b の初等関数では表されないことが現代では知られている．簡単のために $0<b<a$ としておく．オイラーに従って，

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = n$$

とおくと

$$\frac{1}{4}L = \frac{\pi b}{2}\left(1 + \frac{1\cdot n}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot 3\cdot n^2}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot n^3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot n^4}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8} + \text{etc.}\right).$$

これで楕円周が求められる ([383])．ただし，$n < 1$ である必要がある．n が 1

---

2 Vito Volterra (1860-1940).

に近いと収束は悪い．

オイラーはその後何度もこの問題の解の改良を試みており，[384] では，

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

とおいて，

$$L = c\pi\sqrt{2}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4k-1) \cdot (4k-3)}{16^k (k!)^2} n^{2k}\right)$$

を得ている．この公式では楕円が何であっても $n < 1$ であるから，これは常に収束する．ただし，b が小さいと（すなわち扁平な楕円だと）n は 1 に近く，収束は必ずしもよくない ([100])．

[383] でオイラーは

$$\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

を得ているので，

$$L = 4\int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

を知っていたと言うことができる．ここで，現代の我々の記号

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

を使った．変数変換すれば周の長さは

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{D.3}$$

と表される．これを e^2 についてべき級数展開すると，級数表示を得る．この収束はあまり速くはない．(D.3) はいわゆる楕円積分であり，e の初等関数で表すことはできないことがわかっている．$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ は通常 $E(e)$ で表し，第二種完全楕円積分と呼ばれている．

[384] でオイラーは次の改良公式を使っている．

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1+z}{2}$$

で z を定義すると，

$$L=\sqrt{2(a^2+b^2)}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-nz}{1-z^2}}\,\mathrm{d}z$$

ここで,

$$n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

関数 $\sqrt{1-nz}$ を n についてべき級数展開すると,

$$\int_{-1}^{1}\frac{z^k}{\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z$$

という積分に出会うが,これは積分可能である.こうしてオイラーは次式を得る.

$$\begin{aligned}L=&\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}\left[1-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}n^2\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}n^4\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right.\\&\left.-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}n^6\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}-\cdots\right]\end{aligned}$$

$n<e^2$ であるから,これは楕円積分を e^2 で展開したよりはよい値を与える.

歴史的には様々な近似公式が見つかっている.たとえば [282] を見よ.

関孝和 解見題之法における関孝和の近似公式(1680 年代).

$$L\approx\sqrt{4\pi^2ab+16(a-b)^2}.$$

円ならば $a=b$ として正しい値を与え,$b=0$ ならば長さ $2a$ の線分となるから周は $4a$ となり,正しい.関がこの式にどの程度満足していたかは不明という(小林 [488]).

Giuseppe Peano ペアノの近似公式([555],1887 年).

$$L\approx\pi\left[\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right].$$

彼は

$$\pi\left[\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right]>L>\frac{2\pi}{9}\left(19s-4\frac{2s^2+3p^2}{\sqrt{s^2+3p^2}}\right)\tag{D.4}$$

も示している.ここで,$s=(a+b)/2, p=\sqrt{ab}$.

Srinivasa Ramanujan Ramanujan の近似公式([568],1914 年.[282] 参照).

$$L \approx \pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right].$$

Ladies' Diary の Question189（1736 年出題）の中に，

$$L \approx 2\sqrt{a^2+b^2}+\frac{b}{3}$$

が，ある紳士が Weekly Oracle に挙げた公式として紹介している．e が小さいときには関の公式よりも悪いが，それでも最大で 0.8% 程度であるから，悪くはない．また，π の値も使う必要がない．これは利点である．

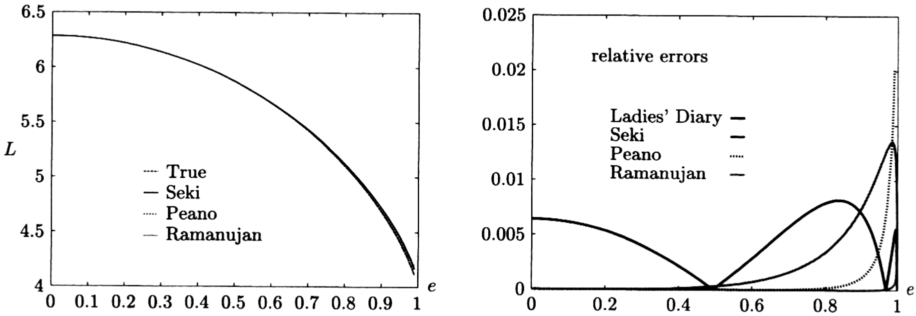


図 D.1 関，ペアノ，ラマヌジャンの公式．右図は相対誤差．ペアノの公式は $0.99 \le e < 1$ では非常に誤差が大きいが，e が小さいところでは小さい．

これらの公式を，$a = 1$ として e の関数と見なし計算したものが図 D.1 である．関の公式が最も悪いが，それでもそれほどずれているわけではない．どれも e が 1 に近いところを除けば精度はよい．ラマヌジャンの公式は極めて精度がよく，見た目には正しい値と差が出ないほどである．相対誤差で見ても最大で 0.2% 程度である．

和算家の坂部広胖も 1815 年に楕円の周を計算している．算法点竄指南録の第 195 問がそれである．

今有側円如図．只云側円長座五寸，短座三寸．問側円周幾何．
答曰側円周一十二寸七六三四九九五三有奇．

100 等分のシンプソン則で数値積分すると，

$$12.76349943169907$$

8 桁は合っている．

DE 公式で計算すると

12.76349943169838

であった．本当の値は 9953 ではなく，9943 と思われる．しかし，この精度の高さは異様である．一体全体どうやって計算したのであろうか？ 三上義夫の本 [238] には計算方式は載っていない．明治前日本数学史 [46] 第四巻にはその求め方が書いてある．

＊　＊　＊

演習問題

[問題 1] ✿ m が自然数のとき

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = \frac{\pi m}{2}$$

を証明せよ．（ヒント：左辺を S_m とおくとき，部分積分することによって

$$S_m = m \int_0^{\pi/2} \sin 2mx \cot x \, \mathrm{d}x$$

を示せ．[372]）

[問題 2] ✿✿ 次の等式を正当化することによって左辺の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{h \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} h. \tag{D.5}$$

（この証明はハーディー [451] からとったものである．）

[問題 3] ✿✿✿ (D.4) の左側の不等式を証明せよ．

E 関数の定義の変遷

James Gregory の定義 ある量 x が別の量 $a, b, \cdots$ から四則演算，べき根をとること，あるいはその他思い浮かべることができる演算からできあがるときに x は $a, b, \cdots$ から合成されていると呼ぶ.

Leibniz の定義 言葉を生み出したものの，定義は無し.

Johann Bernoulli の関数の定義 On appelle ici Fonction d 'une grandeur variable, une quantite de quelque maniere que ce foit de cette grandeur variable & de constantes.（*Opera Omnia*, vol. I & II, Georg Olms (1968) 元々は 1742 年の出版.）

Euler の関数の定義 1 Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.（[137] の 18 ページ）
「ある変数の関数とは，その変数といくつかの数，すなわち定数を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表現のことである.」

Euler の関数の定義 2 Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent seu per eam determinantur, eius functiones vocantur;
このように，別の諸量に依存しているある量，つまり，他の諸量が変化するときに変化を受ける量はもとの諸量の関数と呼ばれる．この定義はかなり広く適用することができ，一つの量が他の諸量に依存する一切の仕方を含んでいる．したがって，x が変数ならば，どんなふうにであれ x に依存する，あるいは x から決まる量は x の関数と呼ばれる.
Institutiones Calculi Differentialis, (1755). [139, 140].

S.F. Lacroix *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, (1797). こ

れは大変長く読み継がれた微積分学の教科書である．ここでラクロアは，「昔の解析学者にとって，関数と言えばある変数のべきのことであった．次の段階では関数という言葉は拡張され，代数学の様々な演算を使ったものが関数となった．だから，足し算・引き算・かけ算・割り算・べき・べき根の任意の組み合わせで生じる表示式が関数と呼ばれた．最後に，最新の概念では次の定義となった：1 変数でも多変数でも，その変数に依存して決まるもうひとつの変数を，元の変数の関数とよぶ．変数から関数値を受け渡す演算が既知であろうがわかっていないものであろうが，どちらでもよい」と定義している．

1800 年前後 Lagrange（1797 年），Fourier（1822 年），Cauchy（1822 年）: 関数が何であるか，はっきりとは定義せず．Euler の定義で満足しているのかもしれない．

Fourier Fourier は「まったく任意の関数」という言葉を [145] において頻繁に用いている．

例：関数 fx はまったく任意の関数，すなわち，単一の法則に従うものであろうとなかろうと，0 と任意の値 X との間に含まれるすべての値に対応する一連の値のことである．

Cauchy [108] いくつかの変数の間に，その中の一つの値が与えられたとき，それから他のすべての変数の値を決めることができるような関係があったなら，通例に従い，これら様々な変数が，そのうちの一つを用いて表されると考える．この一つの変数は「独立変数」という名前をもつ．そしてこの独立変数を用いて表される他の変数は，この変数の関数と呼ぶところのものである．
（これは Euler の定義 2 とほぼ同じと見なしてよかろう．）

Dirichlet Dirichlet の例（1829 年）

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

Dirichlet がこうした関数の例を示して見せたのは，これでは積分ができず，フーリエ級数展開ができないことを示したかったためである．

Stokes [601].

By the term *function* I understand in this paper a quantity whose value depends in any manner on the values of the variable, or on the values of the

several variables of which it is composed. Thus the functions considered need not be such as admit of being expressed by any combination of algebraical symbols, even between limits of the variables ever so close.

de Morgan [123] の 35 ページ.

Every expression which in any way contains x, or depends for its value upon the value of x, is a *function* of x.

同 45 ページには連続関数の定義がある.

Postulate 2.— If $\phi - a$ be any finite value of ϕx, it is always possible to take h so small, that $\phi(a+h)$ shall be as near to ϕa as we please, and that ϕx shall remain finite from $x = a$ to $x = a + h$, and always lie between ϕa and $\phi(a+h)$ in magnitude.

This again is a part of our experience of algebraical functions. It is generally assumed under the name of *the law of continuity.* The latter part of the postulate may be true of the whole extent of some functions: thus, however great h may be, x^2 perpetually increases between a^2 and $(a+h)^2$.

It is possible to imagine a function which does not observe this law, but we cannot, without further consideration of singular values, find the means of expressing it algebraically. For instance, in the following figure, the function represented by A B C D E F is discontinuous at B and D. But we have no means of expressing such a function in common algebra. We may call the law expressed in this postulate the law of *continuity of values*, to distinguish it from that of the next postulate; and we may say that functions, which do not obey this law, if any, are discontinuous in *value.*

これに引き続き continuity of form という概念の定義が続くが，これはオイラーの意味の連続性と同じである．19 世紀の中頃には物理学者のストークスよりも数学者のド・モルガンの方が保守的である，あるいは不勉強であったと言うべきか．

Dedekind Dedekind の定義（1887 年）[38].

一つの集合 S の「写像」とは，一つの法則のことであって，この法則に従って S のひとつひとつの確定した要素 s に確定した事物が「属し」，これを s の「像」といい，$\varphi(s)$ で表す．…集合の写像の例としては，その要素に確定した記号または名前を付けるだけでもよい．

法則とは何か？ 対応とは何か？　これは結局のところ未定義用語である．
Peano の定義．S を集合とせよ．直積集合 S × S を定義せよ．S × S の部分集合 R で，$(x, y) \in R$, $(x, z) \in R$ ならば $y = z$ となるものを関数と呼ぶ．

Bochner　「関数」という観念は，数学や科学に対して最高級の重要性をもつ数学的対象である．この観念を記述するには「対応」という言葉を使うのと「関係」という言葉を使うのと二つの主な道があって，両方ともよく意味を明らかにしてはくれる．しかし本当をいうと，関数の観念は定義可能なものではなく，定義のつもりでいるもの (would-be definition) も実際は同語反復であるに過ぎない（[93]（和訳）の 164 ページ）．

Weyl　だれも函数とは何であるかを説明することはできない，しかしこれは数学において真に重大な事柄である（ヘルマン・ワイル，『数学と自然科学の哲学』，岩波書店（1959）の 9 ページ）．

他のリストとして [581] がある．

F　本書に登場する主な主人公の生涯

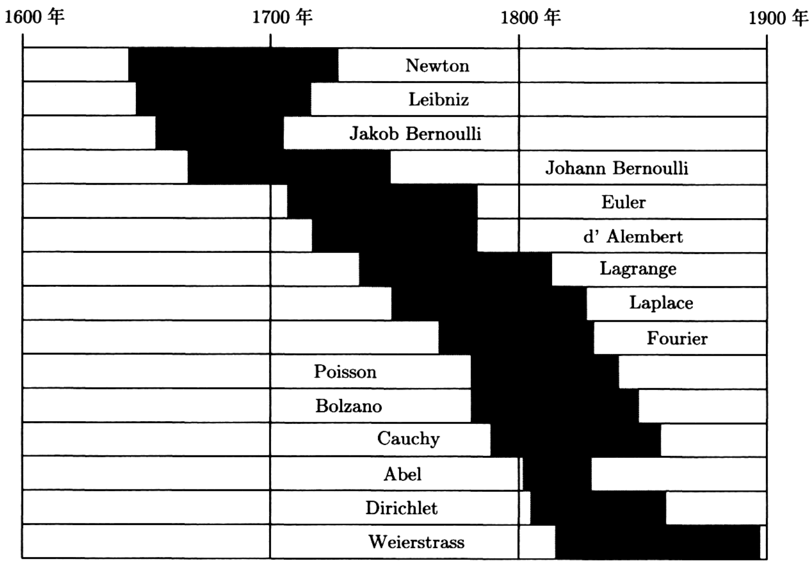


図 **F.1**　数学者の生没年.

G　章末演習問題の解答

＊＊＊第 I 部＊＊＊

1 章

問題 1　省略.

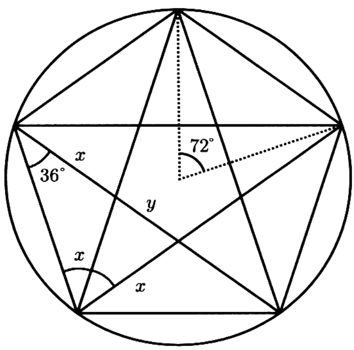


図 G.1　正五角形

問題 2　$\cos 36^\circ = (1+\sqrt{5})/4$ であることは古代ギリシャの知識でわかる．(図 G.1 において，$(x+y) : x = x : y$．これを用いると x と y の比がわかる．) これから，$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ を得る．倍角の公式を使うと，

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

を得る．一方，$\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$，$\sin 30^\circ = 1/2$ から，

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

を得る．これから，$\sin 3^\circ = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ$ が計算できる．
$X = \sin 1^\circ$, $a = \sin 3^\circ$ とおく．a は既知量である．3 倍角の公式を使って，$4X^3 - 3X + a = 0$ を得る．これを厳密に解くことはプトレマイオスにはできなかった．中世になれば近似的に解く方法が発見されている．これについては [276, 570] が参考となるであろう．具体的には，$x_{n+1} = \frac{4x_n^3+a}{3}$ で逐次近似するわけである．あるいは，$\sin x$ のテイラー展開を用いてもよい近似値が得られる．

問題 3〜5　有名なので省略.

問題 6　関数 $f(x) = \tan^{-1}(a/x) - \tan^{-1}(b/x)$ が最大になるように x を定めればよい.

$$f'(x) = \frac{\frac{-a}{x^2}}{1+\frac{a^2}{x^2}} - \frac{\frac{-b}{x^2}}{1+\frac{b^2}{x^2}} = \frac{-a}{a^2+x^2} + \frac{b}{b^2+x^2} = \frac{(a-b)(ab-x^2)}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}.$$

したがって，$x = \sqrt{ab}$ ととればよい．

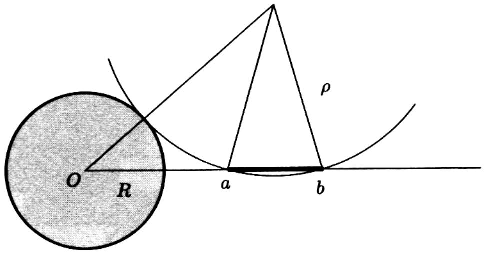


図 G.2 土星の輪の問題の解

土星の輪の問題では，半径を R とし，$\angle aOc = x$ とし，$\angle Ocb = \beta, \angle Oca = \alpha$ とする．正弦定理と余弦定理から

$$\sin\beta = \frac{b\sin x}{\sqrt{R^2+b^2-2bR\cos x}}, \qquad \sin\alpha = \frac{a\sin x}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos x}}.$$

$\beta - \alpha$ を最大にすればよい．しかし，この微分を実行するのは大変である．この解を幾何学的に解釈するほうがよい．点 a, b を通り，土星に接する円がただ一つに定まるが，この円の接点が求めるものである（図 G.2）．

問題 7 相加平均が相乗平均よりも大きいことから

$$xy = \sqrt[3]{x^2 \cdot xy \cdot y^2} < \frac{x^2+xy+y^2}{3}.$$

一方，$0 < (x-y)^2$ は次のように書き直すことができる：

$$3(x^2+2xy+y^2) < 4x^2+4xy+4y^2, \quad \text{すなわち,} \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < \frac{x^2+xy+y^2}{3}.$$

これらふたつの不等式から結論を得る．

問題 8 （この問題の参考文献は，[144, 244]）．

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

から直ちに (1.2) がしたがう．次に，

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{N+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)$$

これから (1.3) がわかる．(1.2)(1.3) および次式から (1.4) がわかる．

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

問題 9　簡単なので証明は省略する．出典は [111] の 87 ページ．バーロウの時にはまだ微積分ができていなかったことに注意していただきたい．つまり，皆さんがおそらく使ったであろう証明法が当時は使えなかったということである．ベルヌーイ (Jakob Bernoulli, 1654-1705) の著書 *Ars Conjectandi*（1713 年）には a が自然数の場合が現れている．

問題 10　体積は

$$\int_1^{\infty}\pi z^{-2}\,\mathrm{d}z=\pi$$

となり，有限である．表面積は

$$\int_1^{M}2\pi z^{-1}\sqrt{1+z^{-4}}\,\mathrm{d}z>\int_1^{M}2\pi z^{-1}\,\mathrm{d}z=2\pi\log M\to\infty.$$

問題 11　表面積が有限であるから，

$$2\pi\int_1^{\infty}f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x<\infty.$$

これから，$\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$ を得る．ゆえに，

$$\int_1^{\infty}f(x)^2\,\mathrm{d}x\leq f(1)\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<\infty.$$

すなわち，体積も有限にならざるを得ない．

問題 12　これはプトレマイオスの定理である．

問題 13　面積は次式で与えられる．

$$\int_0^{2\pi}y\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\cdot(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=3\pi.$$

問題 14　周の長さは，

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=8.$$

2 章

問題 1　省略．

問題 2　AB を a で，BD を b で，GE を c で表し，CB を x とする．このとき A から E まで行

くのにかかる時間は

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}$$

となる．x で微分すると，

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-c}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}}. \tag{G.1}$$

$T'(x)=0$ となる x は，$0<x<c$ においてただ一つ存在する．それが答えである．$\sin\alpha = x/\sqrt{x^2+a^2}$ であり，$\sin\beta=(c-x)/\sqrt{(x-c)^2+b^2}$ であるから，(G.1) は $\sin\alpha/\sin\beta = v_1/v_2$ を意味する．

この問題と同様の問題はライプニッツ [68] でも論じられ，その後何度も教科書に現れる．さらに *Ladies Diary* の 1729 年号の懸賞問題 ([192]) としても現れている[1]．

問題 3 点 X の座標を ξ とし，$WX=f(\xi)$ とする．W における接線は $y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ であるから，C の座標は $\xi-f(\xi)/f'(\xi)$．すなわち，CX の長さは $f(\xi)/f'(\xi)$ となる．これが ξ によらず定数となるわけであるから，$f'(\xi)\equiv cf(\xi)$ となる定数 c がとれる．この微分方程式を解くと f は指数関数であることがわかる（この問題は [87] の 21 ページでも取り上げられているから，当時は重要な問題であったということがわかる．ライプニッツはデカルトも解けなかったこの問題を解けた，と自信に満ちた書きっぷりである）．

問題 4 部分積分によって

$$\int f(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \frac{x^2}{2}f'(x) + \int \frac{x^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x = \cdots$$

これを繰り返せばよい．$f(x)=1/(1+x)$ のときには次式を得る．

$$\log(1+x) = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \frac{x^4}{4(1+x)^3} + \cdots$$

問題 5 $a=-x$, $F'=f$ とすればベルヌーイの級数を得る．

問題 6 ベルヌーイからテイラーを導くには，ベルヌーイの級数を

$$F(x)-F(0) = xF'(x) - \frac{x^2}{2!}F''(x) + \frac{x^3}{3!}F'''(x) - \cdots$$

と書き直す．F は f の原始関数である．関数 F は何でもいいのであるから，$x\mapsto F(a-x)$ についても成り立つ．ゆえに，

$$F(a-x)-F(a) = -xF'(a-x) - \frac{x^2}{2!}F''(a-x) - \frac{x^3}{3!}F'''(a-x) - \cdots.$$

$x=a$ とおくと

$$F(0)-F(a) = -aF'(0) - \frac{a^2}{2!}F''(0) - \frac{a^3}{3!}F'''(0) - \cdots.$$

---

1 *Ladies' Diary* とは 18 世紀から 19 世紀にかけて出版されたイギリスの雑誌で，その名の通り女性のための雑誌であった．雑誌とはいうものの，年に 1 回の出版であったので年鑑という方がより正確である ([282, 558])．そこでは結構高度な数学の問題が出題されており，数学の社会への浸透を見る上で貴重である．どんな問題が出題されたのかは [192] を見よ．

これはすなわちマクローリン級数である．これがテイラーの定理と同値であることはよく知られている．

問題 7

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1+y'}{x+y}$$

と書き直す．これから，$y' = c(x+y)$ を得る．ここで c は定数である．これを解くと

$$y = -x - \frac{1}{c} + ae^{cx}$$

となる．ここで a は定数である．

問題 8 懸垂線は英語では catenary という．これはラテン語の catena =鎖 から生まれた言葉である．これは一見すると放物線のようにも見える．実際，ガリレオ（[21] の第 2 日）はその曲線が放物線であると思っている．しかし，放物線を紙に描いてひもを垂らすと直ちにわかるように，懸垂線は放物線よりも横に出っぱっていることがわかり，放物線は解でないということが推測できる．

ひもの形を $y = f(x)$ とし，ひもの小さな一部を考えよう．この左端の座標を（$x, f(x)$）とし，右端を（$x + dx, f(x + dx)$）とする．ひもの左端からは，その点よりも左にあるひもの部分が引っ張っており，右端ではその点よりも右の部分が引っ張っている（これをひもの張力と呼ぶ．図 G.3）．さらに重力が働いており，これら 3 種類の力がつり合っている．x 方向の力のつり合いから，

$$T(x + \mathrm{d}x)\cos(\theta(x + \mathrm{d}x)) = T(x)\cos(\theta(x)) \tag{G.2}$$

を，y 方向の力のつり合いから

$$T(x + \mathrm{d}x)\sin(\theta(x + \mathrm{d}x)) = T(x)\sin(\theta(x)) + \rho g\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (f'(x)\mathrm{d}x)^2} \tag{G.3}$$

を得る．ここで g は重力加速度，ρ はひもの重量の線密度を表す．

式 (G.2) は $T(x)\cos(\theta(x))$ が x によらない定数であることを意味する．そこで，$T(x)\cos(\theta(x)) = \tau$ とおく．(G.3) の両辺を dx で割って $\mathrm{d}x \to 0$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T(x)\sin(\theta(x))\right) = \rho g\sqrt{1 + (f'(x))^2} \tag{G.4}$$

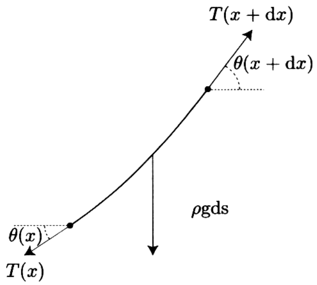


図 G.3 ひもの微少部分における力の釣り合い．$\mathrm{d}s = \sqrt{dx^2 + (f'(x)dx)^2}$

を得る．定義によって $\tan(\theta(x)) = f'(x)$ であるから，

$$T(x)\sin(\theta(x)) = \tau\tan(\theta(x)) = \tau f'(x) \tag{G.5}$$

を得る．(G.4) と (G.5) から

$$f''(x) = \frac{\rho g}{\tau}\sqrt{1+(f'(x))^2} \tag{G.6}$$

が導かれる．あとはこの微分方程式を解けばよい．

$\alpha = \rho g/\tau$ とし，$u = f'$ とおけば，上の微分方程式 (G.6) は $u' = \alpha\sqrt{u^2+1}$ となる．つまり，

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \alpha x + \text{定数}.$$

左辺の積分を計算するには，いささか天下り的であるが，$g(u) = \log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$ で関数 g を定義する．微分してみると，$g'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ がわかるから，

$$\log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = \alpha x + \beta$$

がわかる（β は定数）．よって，$u+\sqrt{u^2+1} = \exp(\alpha x+\beta)$ となり，これを整理して $u^2+1 = e^{2(\alpha x+\beta)} - 2ue^{\alpha x+\beta} + u^2$, すなわち，

$$f' = u = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x+\beta} - e^{-\alpha x-\beta}\right)$$

を得る．これを積分すると

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\cosh\left(\alpha x+\beta\right) + \gamma$$

（γ は定数）となる．

問題 9 $x^x = e^{x\log x}$ とし，テイラー展開すると，次式を得る：

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\log x)^n\,\mathrm{d}x.$$

あとは，帰納的に

$$\int_0^1 x^n(\log x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

を証明すればよい．$\log y = x\log x$ を微分すると，$y'/y = 1+\log x$ となるから，$y' = 0$ となるのは $x = 1/e$ のときである．

問題 10 省略．

問題 11 $A = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$ とし，$X = (\cos x, \sin x)$ とし，図 G.4 のように補助線を引く．すると，

$$\angle AXP = \frac{\alpha}{2},\quad \angle XPO = \frac{\pi-x}{2},\quad \angle XYO = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi-x}{2}.$$

これから，次式を得る．

$$XY = \frac{\sin x}{\cos \frac{x-\alpha}{2}}.$$

これを最大にする x は

$$1 = \tan \frac{\alpha}{2} \tan^3 \frac{x}{2}$$

で特徴付けられることがわかる．これはまた，XY が垂直な半径 OQ によって 2 等分される位置であることもわかる．

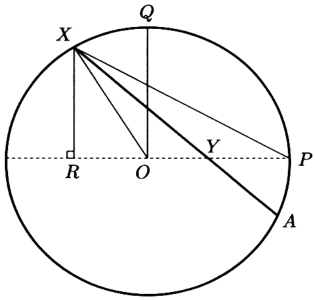


図 G.4

3 章

問題 1　省略.

問題 2　$n > m$ をどちらも自然数とする．このとき

$$f(x) = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - x^{2n+m} + \cdots$$

である．右辺は $x = 1$ のときに $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ である．しかし，左辺は $x \to 1$ のときに m/n に収束する（[267] の 125 ページ）.
ライプニッツは $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1/2$ を次のように解釈した ([223])．N 項目までの部分和を S_N とすると,

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \cdots$$

したがって 1 とゼロが半分ずつの確率で現れるからこれは 1/2 となる.
この解釈も問題なしとは言えないことに注意されたい．なぜならば同じ級数を

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \cdot$$

と書けば,

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = 1, \quad S_5 = 0, \quad S_6 = 0, \quad S_7 = 1, \cdots$$

であるから確率的解釈では 1/3 となる.

問題 3　$a_n = 1/n$ はこの条件を満たすが，我々の知っているダランベールの判定条件は満たさな

い.

問題 4 $m = 1, 2, 3$ くらいならば手計算で確かめることができる．しかし，一般の m で証明するのは楽ではない．ファア・ディ・ブルーノの公式については [472] や [347] を参照せよ．

問題 5 $t = |x|s$ と変数変換すると，左辺 $= \dfrac{2|x|}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^2+1}$．この積分は $s = \tan\theta$ とおくと，簡単に積分でき，答を得る．

問題 6 級数 $\sum \frac{1}{n \log n}$ が反例となる．後半は，ある正定数 c が存在して，十分大きな n について $a_n \geq c/n$ となることからわかる（[427] 参照）．

＊＊＊第II部＊＊＊

4章

問題 1, 2 簡単なので省略．

問題 3 この等式を示すにはコンピュータか電卓が必要であろう．彼の予想は正しくなかったけれども，正否が判明するまでにかかった年月は途方もなく長い．これはこれで彼の天才性を示すものであろう．予想を立てたけれども間違っていたということはよくあることである．1900 年にヒルベルトは 23 個の未解決問題を提唱し，彼自身が解答の予想をしているけれども，彼の予想は間違っていることが判明したものが多い．たとえば彼の第 13 問題に対する予想はコルモゴロフ (A.N. Kolmogorov) とアーノルド (V.I. Arnold) によって 1957 年に否定的に解決されたし，第 14 問題は日本人永田雅宜によって 1959 年に否定的に解決された．また，ヒルベルトは，第 7 問題はリーマンの仮説を証明するよりも時間がかかると予言したが，見事にはずれてしまった．間違いを恐れないというのも大数学者に必要な要件なのであろう．

問題 4 次式に注意すればよい．

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-p^{-2})(1-q^{-2})} &= \left(1+p^{-2}+p^{-4}+\cdots\right)\left(1+q^{-2}+q^{-4}+\cdots\right)\\ &= 1+p^{-2}+q^{-2}+p^{-4}+(pq)^{-2}q^{-4}+\cdots.\end{aligned}$$

問題 5 省略．

問題 6

$$\text{左辺} = -\int_0^1 \log x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) \mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n \log x \, \mathrm{d}x$$

一方,

$$\int_0^1 x^n \log x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

は簡単に示すことができる．従って，左辺の積分は次のように計算できる：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$=2-\frac{\pi^2}{6}$$

問題 7　$\log(1-x)$ をべき級数に展開して,

$$\int_0^1(\log x)^2\log(1-x)\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^n(\log x)^2\,\mathrm{d}x.$$

部分積分によって

$$\int_0^1 x^n(\log x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{(n+1)^3}$$

は容易に示すことができる．したがって,

$$\int_0^1(\log x)^2\log(1-x)\,\mathrm{d}x=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^3}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}=-2\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}.$$

問題 8

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\log(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 x^ny^n\log(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1(x^ny^n\log x+x^ny^n\log y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 x^ny^n\log x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)^3}$$

問題 9

$$\text{左辺}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{kn(n+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

問題 10　(4.10) において，$x=1/2$ とすると，答を得る．

問題 11　まず,

$$\arctan u+\arctan v=\arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

に注意する．これより,

$$\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+2}=\arctan\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n(n+2)}}\right)=\arctan\frac{2}{(n+1)^2}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) = \arctan 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \arctan 2 + \arctan\frac{1}{2} + \arctan 1.$$

$\arctan 1 = \pi/4$ であり，$\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ であるから，答は $3\pi/4$ となる．また，

$$\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+1} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}}\right) = \arctan\frac{1}{n^2+n+1}.$$

これから 2 番目の等式を得る．

問題 12 省略．

問題 13 (4.10) の左辺を $f(x)$ とおくと，$f'(x) = 2\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$．つまり，$\sqrt{1-x^2}f'(x) = 2\sin^{-1} x$．これを微分すると，

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2 \tag{G.7}$$

を得る．f をテイラー展開して，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とすると，明らかに，$a_0 = 0, a_1 = 0$ である．この級数を (G.7) に代入すると，$2a_2 = 2$ と $(n+2)(n+1)a_{n+2} = n^2 a_n (n \geq 1)$ を得る．これから直ちに結論を得る．

問題 14 第 1 式は，(4.10) において，x を i/2 ととればよい．第 2 式は，難しい．[506] を見よ．

問題 15 $\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y}$ である．関数 $f(x) = (\log x)/x \ (1 \leq x < \infty)$ は $1 \leq x < e$ で単調増大，$x = e$ で最大値 e^{-1} をとり，$e < x < \infty$ で単調減少である（図 G.5 参照）．したがって $1 < x < e$ なる任意の x について $f(x) = f(y)$ となる $e < y$ がただ一つ定まり，$e < x < \infty$ なる任意の x について $f(x) = f(y)$ となる $1 < y < e$ がただひとつ定まる．これを描くと図 4.4 のようになる．

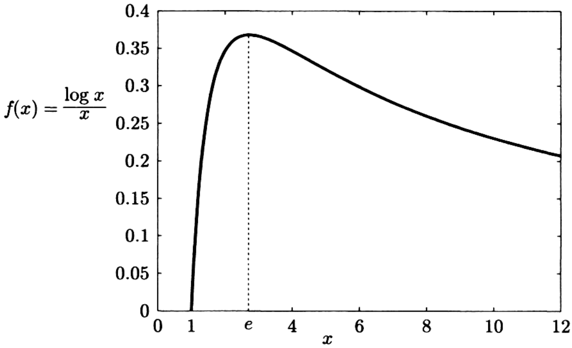


図 G.5 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ のグラフ．

問題 16 省略．

問題 17 これをきちんと証明するには，本書の守備範囲外である関数論の知識が必要となる．したがって，オイラー流に「おおらかに」証明する．(4.2) において $\alpha = \pi/2$ とし，$s = 1/\sigma$ とお

くと

$$\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)=\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{\sigma}}}\,\mathrm{d}y$$

を得る．ゆえに

$$\int_0^\infty \sin x^\sigma\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right).$$

同様に，次式を得る．

$$\int_0^\infty \cos x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)$$

問題 18　1668 年にはライプニッツ流の微積分学はできていなかったことに注意してほしい．まず，

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$$

はすぐわかる．これを積分すると，

$$\frac{1}{2}\left[(x+1)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)\right]=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{5\cdot 6}+\cdots$$

$x\to 1$ とすると左辺は $\log 2$ に近づく．次に，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots&=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)(2n+1)(2n+2)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)\end{aligned}$$

ゆえに，左辺は

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n\cdot(2n+1)}-\frac{1}{2}\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)$$

に等しい．

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)$$

であるから，求める値は

$$\frac{1}{2}(1-\log 2)-\frac{1}{2}\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\log 2$$

となる．

問題 19

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \int_0^x \frac{\cos u}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{\cos u}{1-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u \qquad (w = \sin u \text{ と変数変換})$$
$$= \int_0^{\sin x} \frac{\mathrm{d}w}{1-w^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\sin x}\left(\frac{1}{1-w}+\frac{1}{1+w}\right)\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$= \log\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = \log\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}} = \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

問題 20 展開式は

$$\pi^2 x - x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\times(-1)^{n-1}}{n^3}\sin nx$$

となる．ここで $x=\pi/2$ とおくと求める式が得られる．この等式はオイラーが [375] で得たものである．彼は 1773 年，[389] において，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^2}{4}\log 2 + 2\int_0^{\pi/2} x\log\sin x\,\mathrm{d}x$$

を証明しているから，

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7}\log 2 + \frac{16}{7}\int_0^{\pi/2} x\log\sin x\,\mathrm{d}x$$

は実質的にオイラーが得たものであると言うこともできる．[587, 598] を参照せよ．

問題 21 複素数による級数展開

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots$$

において $z = e^{\sqrt{-1}\theta}$ とおく．

$$\mathrm{Re}\left[\log\left(1-e^{\sqrt{-1}\theta}\right)\right] = \log\left|1-e^{\sqrt{-1}\theta}\right| = \frac{1}{2}\log(2-2\cos\theta)$$

であるから結論を得る．

問題 22 $0\le x\le\pi$ で $f(x)=\pi^4-(\pi-x)^4$ と定義し，偶関数として $-\pi\le x\le 0$ に拡張しておく．そして

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

と展開する．初等的な計算によって，

$$a_0 = \frac{8\pi^4}{5}, \qquad a_n = \frac{48}{n^4} - \frac{8\pi^2}{n^2} \quad (1\le n)$$

を得る．あとは $x=0$ とおけばよい．

問題 23 こうした振動する被積分関数の数値積分は大変難しいことが知られている．大浦拓哉氏の積分ルーティーン ([548]) を参照せよ．図 G.6 のようになる．

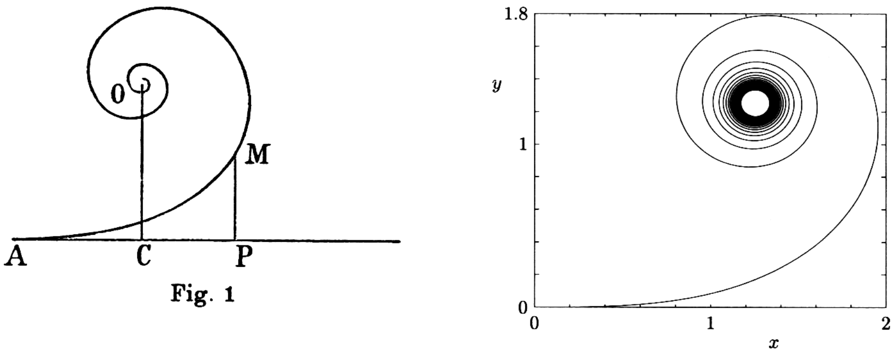


図 G.6 オイラーの螺旋． 左：オイラー全集 ([394]) より． 右：二重指数型積分公式を使って数値計算したもの．渦巻きの中心への収束は非常に遅い．

問題 24 両辺ともに，原点近くで定義された z の正則関数で，原点でゼロとなる．（実際，$|z| < 1$ で正則である．）したがって，その導関数が一致することから両辺が一致することがしたがう．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arctan z = \frac{1}{1+z^2}$$

であり，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{i}}{2}\log\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}+z}+\frac{1}{\mathrm{i}-z}\right) = \frac{1}{1+z^2}$$

であるから，結論を得る．ヨハン・ベルヌーイの証明はこうではないし，$|z| < 1$ という制限も考えていない．[86] の第 I 巻の 393–400 ページを見よ．

問題 25 方針は上と同じである．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{i}\log\left(\sqrt{1-z^2}-\mathrm{i}z\right) = \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}-\mathrm{i}z}\left(\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}-\mathrm{i}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

問題 26 曲線の方程式を $y = f(x)$ とする．点 $P = (\xi, f(\xi))$ における法線は

$$y = -\frac{1}{f'(\xi)}(x-\xi) + f(\xi)$$

であるから，R の x 座標は $\xi + f(\xi)f'(\xi)$ となる．題意より，$f'(\xi)f(\xi) = c$ となる定数 c が存在する．よって，$f(\xi)^2 = 2c\xi + c'$ これは放物線である．

問題 27〜30 省略．

問題 31 z を固定して，x の関数 $\varphi(x) = z^x$ を考える．そのグラフは $z \leq e^{1/e}$ ならば $y = x$ という直線と交点を持つ．この交点の x 座標は $z^x = x$，すなわち，$\log z = \frac{\log x}{x}$ で定まる．グラフを描いてみればわかるように，この方程式は $\log z \leq 1/e$ のときに $x \leq e$ なる根をただ一つ持

つ．$z = e^{1/e}$ ならば $x = e$ で $y = \varphi(x)$ と $y = x$ は接し，$z < e^{1/e}$ ならばその交点で傾きは 1 よりも小である．また，$e^{-e} \le z < e^{1/e}$ ならば傾きは -1 よりも大きい．このとき $y_{n+1} = z^{y_n}$ が収束することはグラフを考えればわかる．

問題 32 $y = z^y$, すなわち，$\dfrac{\log y}{y} = \log z$ となることに注意し，z を y の関数としてプロットすればよい．

5 章

問題 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

問題 2 第 II 部第 8 章の問題 3 を見よ．

問題 3 省略．

問題 4 [549] を見よ．

問題 5 $\epsilon > 0$ を任意に与える．$n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$S_n = \{x \in [a,b] \ ; \ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon\}$$

とおく．仮定によって f も f_n も連続だから S_n は $[a,b]$ で開集合である．f_n の単調性によって

$$S_n = \{x \in [a,b] \ ; \ |f(x) - f_m(x)| < \epsilon \ \ (n \le \forall m)\}$$

となる．すべての点で収束するから $\cup S_n = [a,b]$ である．コンパクト性によって有限個の S_n で $[a,b]$ は被覆される．しかし，単調性によって $S_n \subset S_{n+1} \subset S_{n+2} \subset \cdots$ である．ゆえにある $N > 0$ が存在して $S_N = [a,b]$．これは一様収束を意味する．

問題 6〜10 省略．

問題 11 曲線上の任意の 1 点を (x,y) とすると，次式が成り立つ．

$$\tan\theta = \frac{y}{x-1}, \qquad \tan\frac{\theta}{3} = \frac{y}{x}.$$

三倍角の公式

$$\tan 3z = \frac{3\tan z - \tan^3 z}{1 - 3\tan^2 z}$$

によって

$$\frac{y}{x-1} = \frac{\frac{y}{x}\left(3 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{1 - \frac{3y^2}{x^2}}.$$

これを整理すると $(2x+1)y^2 = (3-2x)x^2$ となる．パラメータ表示は簡単に証明できるから省略する．面積は

$$2\int_0^{3/2} y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/3} \frac{4\cos^2 t - 1}{2} \tan t \cdot 4\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= 4\int_0^{\pi/3} (4\cos^2 t - 1)(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

問題 12　前問とほとんど同じである．

問題 13

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{av(2-v^3)}{(1+v^3)^2}$$

であるから，x を最大にする v の値は $\sqrt[3]{2}$ となる．面積は

$$\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{av}{1+v^3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}v + \int_{\sqrt[3]{2}}^{\infty} \frac{av}{1+v^3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}v$$
$$= \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{a^2v^2(2-v^3)}{(1+v^3)^3}\,\mathrm{d}v + \int_{\sqrt[3]{2}}^{\infty} \frac{a^2v^2(2-v^3)}{(1+v^3)^3}\,\mathrm{d}v$$
$$= \frac{a^2}{3}\int_0^2 \frac{2-x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x + \frac{a^2}{3}\int_2^{\infty} \frac{2-x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{6}.$$

極座標を用いて

$$r = \frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$$

とし，

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{a^2x^2}{(1+x^3)^2}\,\mathrm{d}x$$

を計算してもよい．

問題 14　まず，$f(0)=0$ に注意する．$\psi(y) = \int_0^x \frac{f'(z)}{\sqrt{y-z}}\,\mathrm{d}z$ とおくと，

$$\int_0^x \frac{\psi(y)}{\sqrt{x-y}}\,\mathrm{d}y = \int_0^x\int_0^y \frac{f(z)}{\sqrt{x-y}\sqrt{y-z}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^x\int_z^x \frac{f(z)}{\sqrt{x-y}\sqrt{y-z}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^x\int_0^{x-z} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(x-z-t)t}} f'(z)\,\mathrm{d}z = \pi f(z)$$

問題 15〜18　省略．

6章

問題 1　公式に当てはめれば (6.15) が出る．実際，必要なのは

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{-2(1+(-1)^n)}{n^2-1} \qquad (n \neq 1)$$

だけである．(6.15) の両辺を 2 乗して $-\pi < x < \pi$ で積分すると級数を得る．

問題 2　この関数のフーリエ級数を求めると (6.13) となる．あとはフーリエ級数が元の関数に収束するというディリクレの定理 7.1 を認めたらよい．
または，18 世紀の証明をする．$1/(1+z^2) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 \cdots$ を積分して，$\tan^{-1} z =$

$z - z^3/3 + z^5/5 - z^7/7 + \cdots$. これに $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ を代入すると,

$$\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3} + \frac{\cos 5\theta}{5} - \frac{\cos 7\theta}{7} + \cdots = \mathrm{Re}\left[\tan^{-1} e^{\mathrm{i}\theta}\right].$$

$\alpha + \mathrm{i}\beta = \tan^{-1} e^{\mathrm{i}\theta}$ とおくと,

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \frac{\tan\alpha + \mathrm{i}\tanh\beta}{1 - \mathrm{i}\tan\alpha\tanh\beta}.$$

これが絶対値 1 の複素数であることから, $\tan^2\alpha = 1$ を得る. これから, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ならば $\alpha = \pi/4$ を得る.

問題 3

$$\lim_{r\to 1} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(x-y)} = \begin{cases} 0 & (y \neq x) \\ \infty & (y = x) \end{cases}$$

であるから, $-\pi \leq y \leq \pi$ の積分のうち x の小さな近傍だけが大事であり, 残りは $r \to 1$ のときいくらでも小さくなる. $\epsilon > 0$ を小さな数とし, $x - y = z$ とおいて, $|z| \leq \epsilon$ の場合を考えると $\cos(x-y) \approx 1 - z^2/2$ であるから,

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(x-y)} \approx \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2 + rz^2}.$$

ゆえに r が 1 に近いときには,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)f(y)}{1 + r^2 - 2r\cos(x-y)}\mathrm{d}y \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(1-r)(1+r)f(x+z)}{(1-r)^2 + rz^2}\mathrm{d}z.$$

ここで $z = (1-r)\zeta$ と変数変換すると,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(1-r)(1+r)f(x+z)}{(1-r)^2 + rz^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon/(1-r)}^{\epsilon/(1-r)} \frac{(1+r)f(x+(1-r)\zeta)}{1 + r\zeta^2}\mathrm{d}\zeta.$$

$r \to 1$ のとき右辺は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2f(x)}{1+\zeta^2}\mathrm{d}\zeta = \frac{f(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\zeta^2}\mathrm{d}\zeta = f(x)$$

となる. 厳密な証明は [160] あるいは [119] を見よ.

7 章

問題 1 $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \phi_n(x)$ とおくと,

$$\phi_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

であるから, 固定した x に対して $\phi_n(x)$ は n について有界である. $a_n = 1/\log n$ $(2 \leq n)$ とおくと, これらはすべて正で, かつ, 単調減少である. 十分大きな整数 N と任意の整数 $m > 0$ について

$$\sum_{n=N}^{N+m} a_n \sin nx = a_N(\phi_N(x) - \phi_{N-1}(x)) + a_{N+1}(\phi_{N+1}(x) - \phi_N(x)) \\ + \cdots + a_{N+m}(\phi_{N+m}(x) - \phi_{N+m-1}(x)) \\ = -a_N\phi_{N-1}(x) + a_{N+m}\phi_{N+m}(x) + \sum_{n=N}^{N+m-1} (a_n - a_{n+1})\,\phi_n(x)$$

この右辺の第一項と第二項は N を大きくとればいくらでも小さくできる．和の部分は,

$$\sum_{n=N}^{N+m-1} |a_n - a_{n+1}| \cdot \sup_n |\phi_n(x)| = (a_N - a_{N+m}) \sup_n |\phi_n(x)|$$

で押さえられるから，やはりいくらでも小さくできる．したがって，コーシー列になることがわかったから，収束が証明された．

問題 2 前問と同様に,

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \psi_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

$x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ ならば

$$\sup_n |\psi_n(x)| < \infty$$

である．残りは同じ方法でできる．積分可能性については [160] を参照してほしい．

問題 3 f が 2π 周期であるから,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}-\pi}^{\frac{\pi}{n}+\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right)\sin(ny + \pi)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right)\sin ny\,\mathrm{d}y$$

これより,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right]\sin nx\,\mathrm{d}x$$

となり，求める不等式が直ちに従う．

問題 4 前問から直ちに従う．

問題 5 $f_1 = 1, f_2 = -1, f_3 = 1, f_4 = -1, \cdots$ ととればよい．

問題 6 (6.15) を用いればよい．

問題 7 次のように定義する．

$$D_N(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos kx = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\right)^2$$

このとき,

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \sigma_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

であることが計算によって示される．$f \equiv 1$ を代入すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)\,\mathrm{d}y = 2\pi$$

を得る．$f(y) \le c_2$ と $F_N \ge 0$ から

$$\sigma(x) \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)\,\mathrm{d}y c_2 = c_2$$

がしたがう．もう片方の不等式も同様に証明できる．

問題 8 $D_N(-y) \ge 0$ ならば $f(y) = 1$, $D_N(-y) < 0$ ならば $f(y) = -1$ として関数を f を定義すれば,

$$S_N(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(-y)|\,\mathrm{d}y$$

となる．この右辺は N について非有界であることが知られている ([119, 275]) ので，N を大きくとれば $S_N(0) > 1$ となる．

問題 9 証明は，f が C^2 級であると仮定すればほぼ自明である．しかし，$f \in C^0$ としか仮定しないところがみそである．$\varphi(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$ とおいて,

$$F(x) = f(x) - \varphi(x) + \kappa(x-a)(x-b)$$

を考える．ここで $\kappa > 0$ は定数である．$F(a) = F(b) = 0$ であり,

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{F(x-\alpha) - 2F(x) + F(x+\alpha)}{\alpha^2} = 2\kappa$$

となる．これから，F は (a, b) において最大値をとることがないことがわかる．つまり，すべての x について $F(x) \le 0$．これは $f(x) \le \varphi(x) + \kappa(x-a)(x-b)$ を意味する．$\kappa > 0$ は任意であったから，$f(x) \le \varphi(x)$ を得る．$\kappa < 0$ として同様の考察を行うと，$f(x) \ge \varphi(x)$ を得る．つまり，$f \equiv \varphi$.

問題 10 反例：

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

問題 11

$$\frac{1-a^2}{2}\frac{1}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{1}{2} + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + a^3\cos 3\theta + \cdots,$$

$$\frac{a\sin\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = a\sin\theta + a^2\sin 2\theta + a^3\sin 3\theta + \cdots,$$

$f(z) = \log(1-z)$ から次式を得る：

$$\log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = -\log 2 - \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta - \cdots,$$

$$-\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta - \cdots = \begin{cases} \frac{\theta-\pi}{2} & (0 < \theta \leq \pi) \\ 0 & (\theta = 0) \\ \frac{\pi-\theta}{2} & (-\pi \leq \theta < 0) \end{cases}$$

問題 12, 13 は複雑なので省略. [165] 参照.

問題 14 ほぼ明らかであろう.

問題 15 $\rho_n \cos(nx - \alpha_n) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2})$ と書き直す. 背理法で証明するために, ある数列 $n_j \quad (j = 1, 2, \cdots)$ とある定数 $r_0 > 0$ が存在して, $\rho_{n_j} > r_0 \quad (j = 1, 2, \cdots)$ であると仮定する. $0 < \epsilon < 1/2$ と $n = n_j$ に対し,

$$|\rho_n \cos(nx - \alpha_n)| < \epsilon$$

を満たす $x \in (0, 2\pi)$ 全体の集合を考えると, その測度は, $4\sin^{-1}\epsilon/r_0$ を越えない. しかし, これは仮定に反する.

問題 16 ここでテイトとトムソンはポアソンと同じ過ちを犯している. 彼らの解析学に関する知識はラグランジュ, ポアソン, フーリエあたりで止まってしまっているかのようである. ディリクレの論文を読んでいないのであろう.

問題 17 $P = \{1/n\,; n \in \mathbb{N}\}$ とおくと, $P^{(1)} = \{0\}$, $P^{(2)} = \emptyset$ である. P の各点の右側に P を適当に圧縮した集合を付け加えてできる集合を Q とすると, $Q^{(1)} = P$. 以下, 帰納的にこうした集合を構成すればよい.

8 章

問題 1, 2 定義に戻って考えれば易しいので, 省略.

問題 3 $f(a) > f(b)$ と仮定して矛盾を導く. $f(a) - f(b) > 0$ ならば, $f(b) - f(a) + \delta(b-a) < 0$ となる正数 $\delta > 0$ がとれる. $g(x) = f(x) - f(a) + \delta(x-a)$ とおくと, g は連続で, $g(a) = 0, g(b) < 0$ である. $x \in [a, b]$ で $g(x) = 0$ となるもの全体の上限を ξ とする. $\xi < b$, $g(\xi) = 0$ であり, かつ, $\xi < x < b$ ならば $g(x) < 0$ である. この最後の性質から, $D^+ g(\xi) \leq 0$ である. すなわち, $D^+ f(\xi) + \delta \leq 0$. $\delta > 0$ であり, 仮定より $D^+ f(\xi) \geq 0$ であるからこれは矛盾である.

問題 4

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\frac{x-x_0}{x-y} + \frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y}\,\frac{x_0-y}{x-y} \\ &= (f'(x_0)+\epsilon)\,\frac{x-x_0}{x-y} + (f'(x_0)+\epsilon')\,\frac{x_0-y}{x-y} \\ &= f'(x_0) + (\epsilon+\epsilon')\left(\frac{x-x_0}{x-y} + \frac{x_0-y}{x-y}\right)\end{aligned}$$

において，$|x-x_0|/|x-y| \leq 1$, $|y-x_0|/|x-y| \leq 1$ に注意すればよい．

問題 5 $f(x)=x^2\sin(1/x)$, $x_0=0$ とし，うまく x,y を取ればよい．

$$x_n = \frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{n^2}\right)}, \qquad y_n = \frac{1}{\pi n}$$

ととるとよい．f' が x_0 の近傍で連続ならば，

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1}{x-y}\int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t \to f'(x_0)$$

である．

問題 6 次式に注意する．

$$|\psi(2^n x)-\psi(2^n y)| \leq 2^n|x-y|, \qquad |\psi(2^n x)-\psi(2^n y)| \leq 2$$

これから $|\psi(2^n x)-\psi(2^n y)| \leq 2^{1-\alpha}2^{\alpha n}|x-y|^\alpha$ を得る．これより次式を得る．

$$|T(x)-T(y)| \leq \sum_n 2^{1-\alpha}2^{\alpha n-n}|x-y|^\alpha = K|x-y|^\alpha.$$

問題 7 $x \neq y$ とする．$2^{-m} \leq |x-y| < 2^{-m+1}$ となる自然数 m を選ぶ．このとき，$m \sim 1+|\log|x-y||$ である．

$$|T(x)-T(y)| \leq \sum_{n=1}^{m}\frac{2^n|x-y|}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{2^n} = m|x-y| + 2^{1-m}.$$

問題 8 参照した文献を読んでほしい．

問題 9 問題 6 と同じようにすればよい．

問題 10 マッカーシーの関数 $M(x)$ について示す．十分大きな自然数 N を任意にとる．$x \in [0,1]$ を任意にとる．$y = x \pm 2^{-2^N-1}$ とする．ただし，$\pm$ の符号は，$2^{2^N-1}x$ の少数部分と $2^{2^N-1}y$ の少数部分が，ともに $[0,1/2]$ もしくはともに $[1/2,1]$ に入るようにする．$|x-y| = 2^{-2^N-1}$ である．このとき，ψ の周期性から，

$$M(x)-M(y) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\left[\psi\left(2^{2^n-1}x\right)-\psi\left(2^{2^n-1}y\right)\right]$$

である．

$$\left|\psi\left(2^{2^N-1}x\right)-\psi\left(2^{2^N-1}y\right)\right| = \frac{1}{4}$$

は明らかである．$n<N$ ならば，

$$\left|\psi\left(2^{2^n-1}x\right)-\psi\left(2^{2^n-1}y\right)\right| \leq 2^{2^n-1}|x-y| \leq 2^{2^n-2^N-2} \leq 2^{-2^{N-1}-2}$$

これらの不等式から次式を得る．

$$|M(x)-M(y)| \geq 2^{-N-2} - N2^{-2^{N-1}-2} > 2^{-N-3}$$

ゆえに，任意の $\alpha \in (0,1)$ に対し，

$$\frac{|M(x)-M(y)|}{|x-y|^\alpha} > 2^{-N-3} \times 2^{\alpha 2^N + \alpha} \to \infty \qquad (N \to \infty).$$

問題 11, 12　難しいので，文献を参照してほしい．

問題 13　k, n を自然数とし，$x = k \times 2^{-n}$ という形の数については等式が成り立つことを初等的に確認する．後は連続性を用いればよい．

問題 14　$T_\eta(x) = 2x(1-x)$ となるので，x が整数でなければ微分可能である．

問題 15　有理点での微分不可能性は [23] で証明されている．$x \in (0,1)$ を無理数とし，N を十分大きな奇数とする．x_N, y_N を次式で定義する．

$$x_N = \frac{k}{2N!} < x < y_N = \frac{k+1}{2N!}$$

ただしここで，k は自然数である．このとき，

$$f(x_N) - f(y_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \left\{ \left|\sin \frac{\pi n! k}{2N!}\right| - \left|\sin \frac{\pi n!(k+1)}{2N!}\right| \right\}$$

ここで，$n = N$ の項の値は $\pm 1/2^N$ となる．$n = 1$ から $n = N-1$ までの和は

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\pi n!}{2^{n+1} N!} < \frac{1}{2^{N+1}}$$

で抑えられる．したがって，

$$|f(x_N) - f(y_N)| \geq \frac{1}{2^{N+1}}$$

$|x_N - y_N| = 1/(2N!)$ であるから，この不等式は決してヘルダー連続になり得ないことを示す．

問題 16　各 n につき

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a_n) \\ \frac{1}{n^2} & (a_n < x \leq 1) \end{cases}$$

とおき，$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \phi_n(x)$ と定義するとこれが求めるものである．ただし，a_n の中に 1 があるときには ϕ_n の定義を少し変えねばならない．

問題 17　$x = r_n$ とする．$\sum_{k=m+1}^\infty k^{-2} < \frac{1}{3n^2}$ となるように自然数 $m > n$ をとる．$f(x) = \sum_{k=1}^m + \sum_{k=m+1}^\infty = f_1 + f_2$ と分解する．

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f_1(r_n + h) - f_1(r_n)}{h} = \sum_{k=1}^m k^{-2} a_k, \qquad \limsup_{h \downarrow 0} \left| \frac{f_2(r_n + h) - f_2(r_n)}{h} \right| \leq \frac{1}{3n^2}$$

となる．ここで a_k は 1 もしくは -1 である．一方，

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f_1(r_n - h) - f_1(r_n)}{-h} = \sum_{k=1}^m k^{-2} a'_k, \qquad \limsup_{h \downarrow 0} \left| \frac{f_2(r_n - h) - f_2(r_n)}{-h} \right| \leq \frac{1}{3n^2}$$

において，$k \neq n$ ならば $a'_k = a_k$ であり，$a'_n = -a_n$ である．これから $x = r_n$ で微分不能であることがわかる．x が無理数の時にも同様に f_1 と f_2 に分解し，f_1 が x で微分係数を持つことに注意すれば，微分可能なことが証明できる．

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} a_n$$

ここで，$x < r_n$ ならば $a_n = -1$, $r_n < x$ ならば $a_n = 1$.

問題 18 a を固定したとき，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は x の単調非減少関数となることに注意すればよい．詳しくはブルバキ [56] を見よ．

問題 19 ほとんどすべての x ということと，ほとんどすべての $y = f(x)$ ということを混同するとこうなる．

問題 20 もし $h = 3^{-n}$ で $0 \leq x < x + h \leq 1$ であるならば

$$0 < \omega(x+h) - \omega(x) \leq 2^{-n} = h^{\alpha}$$

である．$3^{-n-1} \leq h \leq 3^{-n}$ ならば

$$0 < \omega(x+h) - \omega(x) \leq \omega(x + 3^{-n}) - \omega(x) \leq \left(3^{-n}\right)^{\alpha} = 3^{\alpha}\left(3^{-n-1}\right)^{\alpha} \leq 3^{\alpha} h^{\alpha}$$

任意の $h < 1$ に対して，$3^{-n-1} < h \leq 3^{-n}$ となる非負整数 n がとれる．

$$\omega(3^{-n} + 3^{-n-1}) - \omega(3^{-n}) = 2^{-n-1} = \left(3^{-n-1}\right)^{\log 2/\log 3}.$$

問題 21〜24 省略．

問題 25 $0 < a \leq 1$ ならば有界変動ではない．$1 < a$ ならば有界変動である．

問題 26 省略．

問題 27 関数 f を形式的に微分してみる．何回微分してもその結果生ずる級数は一様収束するので，C^{∞} であることがしたがう．

問題 28 証明は難しいので省略．

問題 29 $[0,1]$ 内の集合 A と B で，$A \cap B = \emptyset$, A も B も $[0,1]$ で稠密で，どちらの測度も正であるようなものを作り，A で $f = 1$, A の補集合で $f = -1$ とする．このとき $F' = f$ なる F をとれば，これが求めるものである．

9 章

問題 1 よく知られているので省略．

問題 2

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{k^2}{N^2}x^k(1-x)^{N-k} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\binom{N-1}{k-1}kx^k(1-x)^{N-k}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}(k+1)x^{k+1}(1-x)^{N-1-k}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\binom{N-1}{k}kx^{k+1}(1-x)^{N-1-k}+\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{N-1-k}\\
&= \frac{N-1}{N}\sum_{k=0}^{N-2}\binom{N-2}{k}x^{k+2}(1-x)^{N-2-k}+\frac{x}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}x^k(1-x)^{N-1-k}\\
&= \frac{N-1}{N}x^2+\frac{x}{N}=x^2+\frac{x-x^2}{N}.
\end{aligned}$$

問題 3 答：正しくない．$[0,2]$ で定義された関数 f について整数係数多項式 $p(x)$ が $\sup_{0\le x\le 2}|f(x)-p(x)|<1/4$ を満たしているものとする．$|f(0)-p(0)|<1/4, |f(2)-p(2)|<1/4$ が成り立つ．さて，$f(2)=f(0)+1$ を満たす f について，

$$|1+p(0)-p(2)|=|f(2)-p(2)-f(0)+p(0)|<1/2.$$

となる．しかし，$p(0)-p(2)$ は偶数であるからこれは成立しない．

問題 4 $0\le x\le a$ と $b\le x\le 1$ において線形関数で f を延長し，$f(0)=f(1)=0$ となるようにする．あとは系 9.1 を適用すればよい．

問題 5 地道に計算すればよい．

＊＊＊付録＊＊＊

付録 A

問題 1〜3 省略．

問題 4 $-R\le x\le R$ を直径とする上半平面内の半円，およびその直径からなる閉路に沿って積分し，留数定理を用い，$R\to\infty$ とすればよい．

問題 6 $\Phi'(\beta)=2\beta\Phi(\beta)+e^{\beta^2}\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\cos 2\beta x\,\mathrm{d}x$ に注意する．部分積分すると，

$$\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\cos 2\beta x\,\mathrm{d}x=1-2\beta\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2\beta x\,\mathrm{d}x.$$

これは $\Phi'(\beta)=e^{\beta^2}$ を意味する．

問題 7 次式に注意する：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{x^2+z^2}=-\frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}.$$

ゆえに，

$$\int_\beta^1 \int_\alpha^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_\beta^1 \left[\frac{\alpha^2 - z^2}{\alpha^2+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}\right] \mathrm{d}z$$
$$= \int_\beta^1 \left[\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+z^2} - \frac{2}{1+z^2}\right] \mathrm{d}z$$

後は，$(\arctan z)' = 1/(1+z^2)$ を使って積分すればよい．

付録 B

問題 1 次の式を積分すればよい．$\left(ue^{-\int Q(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = P(x)e^{-\int Q(x)\,\mathrm{d}x}$.

問題 2 $v = 1/u$ で v を定義すると，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -Qv - R$ となる．すなわち，前問に帰着された．

問題 3 $u = x + 1/v$ で v を定義すると，$v' = 2xv + 1$ となる．ゆえに，$\left(v(x)e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}$ で解ける．

問題 4 $y = \exp(-\int u)$ とおくと，$u = -\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. このとき，

$$u^2 + x^2 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

これから $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x^2y = 0$ を得る．

問題 5 形式的に微分すると，

$$f''(x) - xf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (-t^2 - x)\cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \mathrm{d}t = 0.$$

問題 6 この積分では微分との順序交換は可能であるから，

$$y'(x) = -nx^{n-1}\int_0^\infty t^{-n}\exp\left(-t^n - \frac{x^n}{t^n}\right) \mathrm{d}t.$$

もう 1 回微分すると，

$$y''(x) = -n(n-1)x^{n-2}\int_0^\infty t^{-n}\exp\left(-t^n - \frac{x^n}{t^n}\right) \mathrm{d}t$$
$$+n^2x^{2n-2}\int_0^\infty t^{-2n}\exp\left(-t^n - \frac{x^n}{t^n}\right) \mathrm{d}t.$$

ここで，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(-\frac{x^n}{t^n}\right) = nx^nt^{n-1}\exp\left(-\frac{x^n}{t^n}\right)$$

を用いて右辺 2 番目の積分で部分積分を実行すると，結論を得る．

問題 7 次式から連続性がしたがう．

$$t^3u \leq \frac{u^3}{3} + \frac{2t^{9/2}}{3}.$$

f を $f(t,u) = \frac{t^3u}{t^4+u^2}$ で定義すると，$f_u = \frac{t^3(t^4-u^2)}{(t^4+u^2)^2}$ となる．ゆえに，$|f_u| < 1/t$.
$c = 2 + \alpha^2$ $(\alpha > 0)$ とおく．そして $u = t^2v$ で v を定義する．すると，

$$tv' = \frac{\alpha^2 v - v^3}{1+v^2}$$

となる．これは積分できて，

$$\frac{v}{(\alpha^2 - v^2)^{(1+\alpha^2)/2}} = At^{\alpha^2} \qquad (A \text{ は任意定数})$$

となる．これは $v(0) = 0$ を満たす無数の関数を定義する．

問題 8　簡単なので省略．

問題 9　二つの解 $u(t), v(t)$ があるならば，

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))\,\mathrm{d}s, \qquad v(t) = u_0 + \int_0^t f(v(s))\,\mathrm{d}s$$

が成り立つ．$w(t) = |u(t) - v(t)|$ とおくと

$$w(t) \le \int_0^t cs^{-\alpha} w(s)\,\mathrm{d}s \tag{G.8}$$

が成り立つ．まず最初に $\alpha < 1$ のときに考えよう．w は連続であるから，$0 \le t \le T$ において $0 \le w(t) \le M$ とできる（M は定数である）．したがって，これを (G.8) の右辺に代入すると，

$$w(t) \le cM\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

を得る．これを再度（G.8）の右辺に代入すると，

$$w(t) \le c^2 M\frac{t^{2-2\alpha}}{(1-\alpha)(2-2\alpha)}.$$

これを繰り返すと

$$w(t) \le \frac{Mc^n T^{n(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^n n!}$$

を得る．$n \to \infty$ とすれば $w \equiv 0$.

$\alpha = 1, c < 1$ のときには，w はリプシッツ連続であり，$w(0) = 0$ であるから，$0 \le t \le T$ において $0 \le w(t) \le Mt$ とできる．（M は定数である．）このとき $0 \le w(t) \le c^n Mt$ を得るから，$c < 1$ という仮定により，やはり $w \equiv 0$.

問題 10　$\dot{u}(0) = f(0) = 1$ であるから，ある $\delta > 0$ が存在して $0 < t < \delta$ で $u(t) > 0$ である．しかしそこで $\dot{u}(t) = -1$ である．これと $u(0) = 0$ は矛盾する．

問題 11　t_0 を固定し，$\phi(t) = f(t_0, u)$ とおく．与えられた条件によって，ϕ は至る所で単調増加か至る所で単調減少である．どちらでも証明は同じようなものなので，単調増加として話を進める．$\phi(y+h) - \phi(y) \ge \psi(h)$ であるから，

$$\limsup_{h\downarrow 0} \frac{\phi(y+h) - \phi(y)}{h} \ge \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\psi(h)}{h} = \infty.$$

ここで，無限大になることは $\int_0^\epsilon \psi(x)^{-1}\,\mathrm{d}x < \infty$ からわかる．一方で，単調増加関数はほとんど至る所で有限な微係数を持つ．これは矛盾である．

問題 12　曲線の方程式を $y = f(x)$ とする．点 $(\xi, f(\xi))$ における接線は

$$y = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi).$$

この曲線と原点との距離を L とすると,

$$L = \frac{|f(\xi) - \xi f'(\xi)|}{\sqrt{1+f'(\xi)^2}}$$

である．すなわち，L をパラメータとして

$$\xi^2 f'(\xi)^2 - 2\xi f(\xi) f'(\xi) + f(\xi)^2 = L^2\left(1+f'(\xi)^2\right)$$

という微分方程式を得る．このままでは解きにくいので，ξ について微分すると,

$$2\xi^2 f' f'' - 2\xi f f'' = 2L^2 f' f''$$

したがって，$f'' \equiv 0$ もしくは $2L^2 f' = -2\xi f + 2\xi^2 f'$ を得る．前者はもちろん，曲線が直線であることを意味する．後者は変数分離型となっているので解ける．これを，$f(0) = \pm L$ という条件の下で解けばよい．

付録 C

問題 1　この問題は有名であるので様々な文献に見受けられる．たとえば [463] を見よ．

付録 D

問題 1　$S_m = \int_0^{\pi/2} -\sin^2 mx\,(\cot x)'\,\mathrm{d}x = m\int_0^{\pi/2} \sin 2mx \cot x\,\mathrm{d}x$ に注意する．$\int_0^{\pi/2} \sin 2mx \cot x\,\mathrm{d}x$ は m によらない．実際,

$$\int_0^{\pi/2} (\sin 2(m+1)x - \sin 2mx) \cot x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \cos(2m+1)x \cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

問題 2　積分の定義からこの式は導かれる．無限区間での積分なので多少の注意が必要であるが，読者にゆだねる．(4.12) によって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \frac{\pi - h}{2} \to \frac{\pi}{2} \qquad (h \downarrow 0).$$

問題 3　まず，次式に注意する．

$$\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \le a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{(a-b)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}.$$

これを積分すると

$$\frac{L}{4} < \frac{\pi(a+b)}{4} + \frac{(a-b)^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

を得る．ここで，多少の式変形の後

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \qquad (0 < a, b)$$

を用いるとよい．

関連図書

[1] St. Andrews 大学の数学史のウェブサイト.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

[2] オイラーアーカイブ `http://eulerarchive.maa.org/`

[3] Dictionary of Scientific Biography (New York, Scribner), これは C.C. Gillispie 編集で 1970 年から出版され始めた科学者の伝記的データの集成である. 数学者のみならず, 物理学者や化学者も載っており, たいていの数学者はこの中に納められている.

教科書

[4] ウェルギリウス, 泉井久之助（訳),『アエネーイス』(上・下), 岩波書店 (1976).

[5] A. アーボー:『古代の数学』, 河出書房新社 (1971). 原著は A. Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, Random House (1964).

[6] 新井仁之,『フーリエ解析学』, 朝倉書店 (2003).

[7] E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner(1931).
E. Artin, 上野健爾（訳・解説),『ガンマ関数入門』日本評論社 (2002).

[8] 猪狩惺,『フーリエ級数』, 岩波書店 (1975).

[9] 伊藤清三,『ルベーグ積分入門』, 裳華房 (1963).

[10] ヴァン・デル・ウァルデン, 村田全・佐藤勝造（訳),『数学の黎明』, みすず書房 (1984). 原著は 1954 年の出版.

[11] ヴァン・デル・ヴェルデン, 加藤明史（訳),『代数学の歴史』, 現代数学社 (1985). B.L. van der Waerden, *A History of Algebra from Al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer (1985).

[12] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一,『関孝和序論』, 岩波書店 (2008).

[13] オイラー, 高瀬正仁（訳),『オイラーの無限解析』, 海鳴社 (2001). [137] の第 1 巻の和訳.

[14] オイラー, 高瀬正仁（訳),『オイラーの解析幾何』, 海鳴社 (2005). [137] の第 2 巻の和訳.

[15] 岡本久・中村周,『関数解析』1・2, 岩波書店 (1997).

[16] 岡本久,『ナヴィエ－ストークス方程式の数理』, 東京大学出版会 (2009).

[17] 小川束・佐藤健一・竹之内脩・森本光生,『建部賢弘の数学』, 共立出版 (2008).

[18] 小川束・平野葉一,『数学の歴史』, 朝倉書店 (2003).

[19] 春日真人,『100 年の難問はなぜ解けたのか』, 日本放送出版協会 (2008).

[20] ガリレオ・ガリレイ, 青木靖三訳,『天文対話』(上・下), 岩波書店 (1959,1961)

[21] ガリレオ・ガリレイ, 今野武雄・日田節次訳,『新科学対話』(上・下), 岩波書店 (1937,1948)

[22] F. クライン，石井省吾・渡辺弘（訳），『クライン：19 世紀の数学』，共立出版 (1995). 1926 年のドイツ語原本からの翻訳.
[23] 小平邦彦，『解析入門 I』，岩波書店 (1976).
[24] コペルニクス，矢島祐利（訳），『天体の回転について』，岩波文庫 (1953).
[25] 小堀憲，『数学史』，朝倉書店 (1956).
[26] コルモゴロフ・フォミーン，山崎三郎（訳），『函数解析の基礎』（第 2 版），岩波書店 (1962).
[27] 塩川宇賢，『無理数と超越数』，森北出版 (1999).
[28] L. シュワルツ，吉田耕作・渡辺二郎（訳），『物理数学の方法』，岩波書店 (1966).
[29] 杉原正顯・室田一雄，『数値計算法の数理』，岩波書店 (1994).
[30] 銭宝琮（編），川原秀城（訳），『中国数学史』，みすず書房 (1990).
[31] 高木貞治，『代数学講義』改訂新版，共立出版 (1965).
[32] 高木貞治，『解析概論』改訂第 3 版，岩波書店 (1983).
[33] 高瀬正仁，『dx と dy の解析学』，日本評論社 (2000).
[34] 高瀬正仁，『無限解析のはじまり』，筑摩書房 (2009).
[35] 高瀬正仁，『高木貞治』，岩波新書 (2010).
[36] 高橋秀裕，『ニュートン　流率法の変容』，東京大学出版会 (2003).
[37] 辻正次，『実関数論』，槇書店 (1962).
[38] デーデキント，河野伊三郎（訳），『数について』，岩波書店 (1961).
[39] J. デュドネ（編），上野健爾ほか（訳），『数学史 I II III』，岩波書店 (1985). 原著は 1978 年出版.
[40] ジャン=ポール ドゥラエ，畑政義（訳），『π 魅惑の数』，朝倉書店 (2001).
[41] 長岡亮介，『数学の歴史（改訂版）』，放送大学教育振興会 (1997).
[42] 中根美知代，『ϵ-δ 論法とその形成』，共立出版 (2010).
[43] 中村幸四郎，『近世数学の歴史』，日本評論社 (1980).
[44] 中村周，『フーリエ解析』，朝倉書店 (2003).
[45] V.A. ニキフォロフスキー，馬場良和（訳），『積分の歴史 アルキメデスからコーシー，リーマンまで』，現代数学社 (1993).
[46] 日本學士院（編），『明治前日本數學史』(1954-1960).
[47] 野海正俊，『オイラーに学ぶ』，日本評論社 (2007).
[48] 林知宏，『ライプニッツ，普遍数学の夢』，東京大学出版会 (2003).
[49] 飛田武幸，『ブラウン運動』，岩波書店 (1972).
[50] E.A. フェルマン，山本敦之（訳），『オイラー—その生涯と業績』，シュプリンガー東京 (2002).
[51] 藤田宏，『大学での微分積分』I, II，岩波書店 (2004).
[52] 藤原松三郎，『微分積分学』第 1 巻，内田老鶴圃新社 (1934).
[53] 藤原松三郎，『日本数学史要』，寳文館，(1952). 再版，勉誠出版，(2007).
[54] プトレマイオス，藪内清（訳），『アルマゲスト』，恒星社 (1982).
[55] M. Fréchet, 斎藤正彦（訳），『抽象空間論』，共立出版 (1987).
[56] ブルバキ，小島順・加地紀臣男・村田全（訳），『数学原論　実一変数関数論 1，2』，東京図書 (1968). 原著は 1961 年.

[57] ブリュノ・ベロスト，辻雄一（訳），『評伝コーシー—フランス革命の大波とともに生きた数学者の生涯』，森北出版 (1998).

[58] ポアンカレ，吉田洋一（訳），『科学の方法』，岩波文庫 (1953). [217] の和訳.

[59] 森正武，『数値解析 第 2 版』，共立出版 (2002).

[60] 山口昌哉・畑政義・木上淳，『フラクタルの数理』，岩波書店 (1993).

[61] 山本昌宏，『逆問題入門』，岩波書店 (2002)

[62] 山本義隆，『重力と力学的世界』，現代数学社 (1981).

[63] 山本義隆，『古典力学の形成　ニュートンからラグランジュへ』，日本評論社 (1997).

[64] 山本義隆，『磁力と重力の発見』1, 2, 3，みすず書房 (2003).

[65] 吉田洋一，『ルベグ積分論』，培風館 (1965).

[66] 吉田耕作，『測度と積分』，岩波書店 (1976).

[67] 吉田忠（編），『ニュートン自然哲学の系譜』，平凡社 (1987).

[68] 下村寅太郎ほか（監訳），『ライプニッツ著作集 第 3 巻』，工作舎 (1999).

[69] D. ラウグヴィッツ，山本敦之（訳），『リーマン—人と業績—』，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998). 原著（1996 年）はドイツ語.

[70] 李迪，大竹茂雄・陸人瑞（訳），『中国の数学通史』，森北出版 (2002).

[71] リーマン，足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介（編訳），『リーマン論文集』，朝倉書店 (2004).

[72] C.D. Andriesse, *Huygens. The Man Behind the Principle*, Camb. Univ. Press, (2005). Translated by S. Miedema.

[73] R. Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométrique* (1874). 1806 年の版は著者らには手に入らなかった. これには英訳がある：A.S. Hardy（訳），*Imaginary Quantities: Their Geometrical Interpretation*, Van Nostrand (1881).

[74] W.W.R. Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, Macmilan (1912), Reprint Sterling Pub. (2001).

[75] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw (1932), Reprint by Chelsea Publ (1978). English Translation by F. Jellett, North-Holland (1987).

[76] M.E. Baron, *The Origin of Infinitesimal Calculus*, Pergamon (1969).

[77] N.K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series*, vol. I & II, Pergamon (1964).

[78] I.G. Bashmakova, *Diophantus and Diophantine Equations*, Math. Assoc. Amer. (1997).

[79] I. Bashmakova and G. Smirnova, *The Biginning & Evolution of Algebra*, Math. Assoc. Amer. (2000).

[80] B. Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy A Biography*, (Tranls. F. Ragland), Springer (1991).

[81] E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Victor Gollncz (1937), Touchstone Books (1986).

[82] E.T. Bell, *The Development of Mathematics* (1945), Dover (1992).

[83] J.A. Bennett, *The Mathematical Science of Christopher Wren*, Camb. Univ. Press (1982).

[84] G. Berkeley, *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge* (1710). 大

槻春彦和（訳），『人知原理論』，岩波書店 (1958).

[85] G. Berkeley, *The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (1734).

[86] Johannis Bernoulli, *Opera Omnia*, vol. I & II, Georg Olms (1968). 元々は 1742 年の出版.

[87] Johann Bernoulli, *Die Differentialrechnung*, Ostwald's Klassiker der Exacten Wissenshaften, vol. 211 (1924).

[88] D. Bernoulli & J. Bernoulli, *Hydrodynamics and Hydraulics*, Dover (1968, 2005)

[89] J. Bertrand, *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, 第 1 巻, Gauthier-Villars (1864).

[90] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, *Graph Theory* 1736-1936, Oxford Univ. Press (1976).

[91] G. Birkhoff (ed.), *A Source Book in Classical Analysis*, Harverd Univ. Press (1973).

[92] R.P. Boas, Jr., *A Primer of Real Functions*, 4th ed., Math. Assoc. Amer. (1996).

[93] S. Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton Univ. Press (1966). ボホナー，村田全（訳），『科学史における数学』，みすず書房 (1970).

[94] R. Bombelli, *L'Algebra* (1572).

[95] G. Boole, *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*, Macmillan (1872), Dover (2003).

[96] U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer (1986).

[97] C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Hafner (1949). Dover (1959).

[98] C.B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, Scripta Math. (1956). Dover (2004).

[99] C.B. Boyer and U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*, 2nd Ed., John Wiley & Sons (1991).

[100] R.E. Bradley, L.A. D'Antonio, and C.E. Sandifer, *Euler at 300*, Math. Assoc. Amer. (2007).

[101] A. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, Amer. Math. Soc. (1994).

[102] F. Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, Macmilan (1917). 和訳：小倉金之助（補訳），『初等数学史』，共立出版 (1970).

[103] F. Cajori, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court (1919).

[104] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover (1993).1928/29 年に発刊されたものの復刻版.

[105] J.T. Cannon and S. Dostrovsky, *The Evolution of Dynamics; Vibration Theory from 1687 to 1742*, Springer (1981).

[106] G. Cardano, *Ars Magna or the Rules of Algabra*, Dover (1993). Translated into English by T.R. Witmar. 元々のラテン語の版は，*Artis Magnæ, Sive de Regulis Algebraicis*, Liber Unus（1545）である.

[107] A.L. Cauchy, *Cour d'Analyse de L'Ećole Royale Polytechnique* (1821). *Œuvres Com-*

pletes d'Augustin Cauchy, Ser. II, vol. III (1897). 英語訳：R.E. Bradley & C.E. Sandifer, *Cauchy's Cour d'analyse*, Springer (2009). 和訳：西村重人（訳),『コーシー解析教程』, みみずく舎 (2011).

[108] A.L. Cauchy, *Résum'e des Leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul infinitésimal* (1823). *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy*, Ser. II, vol. IV (1899). 和訳：小堀憲（訳),『微分積分学要論』, 共立出版 (1969).

[109] A.L. Cauchy, *Équations Différentialles Ordinaires*, Études ViVantes (1981).

[110] J.M. Child, *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Open Court (1920), Dover (2005).

[111] J.M. Child, *The Geometric Lectures of Isaac Barrow*, Open Court Pub. (1916), Dover (2006).

[112] J.L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, 2nd Ed., Oxford Univ. Press (1949), reprinted in (1990).

[113] R. Courant and H. Robbins (revised by I. Stewart), *What is Mathematics*, Oxford Univ. Press (1996). 和訳：森口繁一（訳),『数学とは何か？』, 岩波書店 (2001).

[114] M.J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Univ. Notre Dame Press (1967).

[115] A.D.D. Craik, *Mr Hopkins' Men*, Springer (2007).

[116] J.N. Crossley, *The Emergence of Number*, World Scienctific (1987).

[117] J. d'Alembert, *Essai d'Une Nouvelle Theorie de la Résistance des Fluides* (1752).

[118] J.W. Dauben, *Georg Cantor*, Princeton Univ. Press (1979).

[119] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Blaisdell (1963), Dover (1975).

[120] P.J. Davis and R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, (1980). 和訳：柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕（訳),『数学的経験』, 森北出版 (1986).

[121] H.T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover (1962).

[122] J.A. de Reyna, *Pointwise Convergence of Fourier Series*, Springer Lecture Notes in Math., vol. 1785 (2002).

[123] A. De Morgan, *The Differential and Integral Calculus* Part 1 & 2, Baldwin and Cradock (1842).

[124] A. de Moivre, *The Doctrine of Chances: or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*, 3rd ed., London (1756).

[125] R. Descartes, *The Geometry of René Descartes*, Open Court (1925), Dover (1954). Translated into English by D.E. Smith and M.L. Latham. 和訳：原享吉（訳),『幾何学』, デカルト著作集 1, 白水社 (2001), 筑摩書房 (2013).

[126] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North-Holland (1981).

[127] E. J. Dijksterhuis, *The Mechanization of the World Picture: Pythagoras to Newton*, Oxford Univ. Press (1961).

[128] U. Dini, *Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali*, T. Nistri e C., (1878). Transl. from Italian by J. Lüroth and A. Schepp, *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer Veränderlichen Reellen Grösse*, Teubner (1892).

[129] U. Dini, *Serie di Fourier e Altre Rappresentazioni Analitiche delle Funzioni di una Variabile Reale*, Pisa (1880).

[130] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover (1965).

[131] W. Dunham, *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, (1991).

[132] W. Dunham, *Euler—The master of us all*, Math. Assoc. Amer. (1999).

[133] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpiece from Newton to Lebesgue*, Princeton Univ. Press (2005).

[134] J.M.C. Duhamel, *Cours d'Analyse de l'École Polythchnique*, Bachelier (1847).

[135] G.W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss. Titan of Science*, Math. Assoc. Amer., (2004).

[136] C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer (1979).

[137] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748); Tomus Primus, Opera Omnia, **I-VIII** [E101]; Tomus Secundus, Opera Omnia, **I-IX**; [E102]. 和訳は [13, 14].

[138] L. Euler, *Introduction to Analysis of the infinite*, Book I and II, Springer (1988, 1990). [137] の J.D. Blanton による英訳.

[139] L. Euler, *Institutiones Calculi Differentialis* (1755), Opera Omnia, **I-X**.

[140] L. Euler, *Foundations of Differential Calculus*, Springer (2000). [139] の第 1 章から第 9 章までの英訳 by J.D. Blanton. 後半の翻訳は本となっていないが，インターネットでは Ian Bruce 氏が英訳を提供している：`http://www.17centurymaths.com/`

[141] L. Euler, *Institutionum Calculi Integralis*, Opera Omnia, **I-XI∼I-XIII**. 第 1 巻 [E342] 第 2 巻 [E366] 第 3 巻 [E385]. `http://www.17centurymaths.com/`

[142] L. Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra* I & II, Opera Omnia I-1, I-2. [E387][E388]. 英訳：J. Hewlett, *Elements of Algebra*, Springer (1972).

[143] K.J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Camb. Univ. Press (1985).
和訳：畑政義（訳），『フラクタル集合の幾何学』，近代科学社 (1989).

[144] G. Ferraro, *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*, Springer (2008).

[145] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822). 英訳：A. Freeman, *The Analytical Theory of Heat* (1878), Dover (2003).

[146] D. Gaier, *Lectures on Complex Approximation*, Birkhäuser (1987).

[147] H. Goldstine, *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton Univ. Press (1972).

[148] H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer (1977).

[149] H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer (1980).

[150] J.V. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, MIT Press (1981). Dover (2005).

[151] J.V. Grabiner, *The Calculus as Algebra: J.-L. Lagrange*, 1736-1813 Garland Pub. (1990). *A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings*,

Math. Assoc. Amer. (2010).

[152] I. Grattan-Guiness, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press (1970).

[153] I. Grattan-Guiness, *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press (1997).

[154] I. Grattan-Guiness, *Joseph Fourier*, MIT Press (1972).

[155] N. Guicciardini, *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700–1800*, Camb. Univ. Press (1989).

[156] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer (1996).

[157] E. Hairer, S.P. Nrsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Equations*, I, Springer (1993). 和訳：三井斌友（監訳），『常微分方程式の数値解法 I』，シュプリンガー・ジャパン (2007).

[158] T.L. Hankins, *Jean d'Alembert*, Clarendon Press (1970).

[159] G.H. Hardy, *Divergent Series*, 3rd Ed., Oxford Univ. Press (1963).

[160] G.H. Hardy and W.W. Rogosinski, *Fourier Series*, Camb. Univ. Press (1956), Dover (1999).

[161] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration*, Univ. Wisconsin Press (1970).

[162] T.L. Heath, *Diophantus of Alexandria: a Study in the History of Greek Algebra*, Camb. Univ. Press (1910), Dover (1964).

[163] T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I & II, (1921). Dover (1981).

[164] C. Hermite and T.J. Stieltjes, *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, I & II, Gauthier-Villars (1905).

[165] E.W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series*, vol. I (3rd ed.) (1927), and vol. II (2nd Ed.) (1926), Dover (1957).

[166] H.N. Jahnke, *A History of Analysis*, Amer. Math. Soc. & Lond. Math. Soc. (2003).

[167] V. Jarnik, *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis*, Soc. Czeko. Math. Phys. (1981).

[168] O.G. Jørsboe and L. Mejlbro, *The Carleson-Hunt Theorem on Fourier Series*, Springer Lecture Notes in Math., vol. 911 (1982).

[169] G.G. Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathmatics*, 3rd ed., Princeton Univ. Press (2010).

[170] V.J. Katz, *A History of Mathematics: A Introduction*, 2nd Ed., Addison Wesley Longman (1998). 和訳：上野健爾・三浦伸夫（監訳），『数学の歴史』，共立出版 (2005).

[171] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd Ed., Camb. Univ. Press (2004).

[172] P. Kelland, *Theory of Heat*, Camb. Univ. Press (1837).

[173] O.D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Springer (1929). Dover (1958).

[174] H.C. Kennedy, *Peano—Life and Works of Giuseppe Peano*, D. Reidel (1980).

[175] A.B. Kharazishvili, *Strange Functions in Real Analysis*, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC (2006).

[176] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Camb. Univ. Press (2001).

[177] F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, Arithmetic, Algebra and Analysis*, (transl. into English from German) (1932), Dover (2004).
[178] J. Klein, *Greek Mathematical Thoght and the Origin of Algebra*, MIT Press (1968), Dover (1992).
[179] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press (1972).
[180] M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford Univ. Press (1980).
[181] T.W. Körner, *Fourier Analysis*, Camb. Univ. Press (1989).
[182] A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich, Birkhäuser, *Mathematics of the 19th Century*, vol. 3, Eds. (1998). Transl. from Russian by Roger Cooke.
[183] S.G. Krantz and H.R. Parks, *The Implicit Function Theorem, History, Theory, and Applications*, Birkhäuser (2002).
[184] T. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, Univ. Chicago Press, (1962).
[185] J.-L. Lagrange, *Œuvres de Lagrange*, **VII**, (1877), 260-261.
[186] J.-L. Lagrange, *Théorie des Fonctions Analytiques*, (1794). 改訂版 (1813). *Œuvres de Lagrange*, **IX**, (1881).
[187] J.-L. Lagrange, *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, Nouvelle ed. (1806), *Œuvres de Lagrange*, **X**, (1884).
[188] J.-L. Lagrange, *Méchanique Analytique*, Œuvres de Lagrange, **XI** (1888) and **XII** (1889). 英訳：*Analytical Mechanics*, (transl. by A. Boissonade and V.N. Vagliente), Kluwer (1997).
[189] J.D. Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover (1972).
[190] H. Lebesgue, *Lecons sur les series trigonometriques*, Gauthier-Villars (1906).
[191] A. M. Legendre, *Exercices de Calcul Intégral*, Paris (1811).
[192] T. Leybourn, *The Mathematical Questions Proposed in the Ladies' Diary*, 1704-1816, Mawman, London (1817).
[193] S.A.J. L'Huilier, *Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs*, G. J. Decker (1786).
[194] M. de L'Hopital, *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (1696).
[195] U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, MIT Press (1973).
[196] M. J. Lighthill, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Camb. Univ. Press (1958).
[197] M. Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*, Simon & Schuster (2005).
[198] G.G. Lorentz, M. v. Golitschek, and Y. Makovoz, *Constructive Approximation, Advanced Problems*, Springer (1996).
[199] J. Lützen, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer (1982).
[200] J. Lützen, *Joseph Liouville 1809-1882, Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer (1990).
[201] C. Maclaurin, *A Treatise of Fluxions*, Ruddimans, Edinburgh (1742).
[202] J.H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology*, Pergamon Press (1964).

[203] E. Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton Univ. Press (1994).

[204] E. Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton Univ. Press (1998).

[205] F.A. Medvedev, *Scenes from the History of Real Functions*, Birkhäuser (1991). Translated from Russian (1975), by R. Cooke.

[206] Abbe Moigno, *Leçons de calcul differéntiel et de calcul intégral*, t. 2 (1844).

[207] P.J. Nahin, *An Imaginary Tale, The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton Univ. Press (1998).

[208] P.J. Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula*, Princeton Univ. Press (2006).

[209] J. Napier, *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms with a Catalogue of Napier's Works*, transl. W.R. MacDonald, Dawsons of Pall Mall (1966).

[210] I.P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable* I, II, transl. from Russian by L.F. Boron, Ungar (1960).

[211] I.P. Natanson, *Constructive Function Theory*, vol. III, Ungar (1965). J.R. Schulenberger によるロシア語からの英訳.

[212] O. Neugebauer, *The Exact Science in Antiquity*, Brown Univ. Press (1957), Dover (1969).

[213] I. Newton, *The Principia*, English Transl., by A. Motto (1729). Transl. by I.B. Cohen, A. Whitman and J. Budenz, Univ. California Press (1999).

[214] J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, 2nd Ed. (1980).

[215] G. Peano, *Selected Works of Giuseppe Peano*, transl. & edited by H.C. Kennedy, Univ. Tronto Press (1973).

[216] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton Univ. Press (2009).

[217] H. Poincaré, *Science et Méthod*, (1908). 和訳：吉田洋一（訳），『科学と方法』，岩波書店 (1953).

[218] H. Poincaré, *La valeur de la Science*. 和訳：吉田洋一（訳），『科学の価値』，岩波書店 (1977).

[219] D. Poisson, *Traité de Mécanique*, 2nd ed. (1833).

[220] R.A. Proctor, *A Treatise on the Cycloid and all the Forms of Cycloidal Curves*, Longmans, Green & Co. (1878).

[221] H. Rademacher and O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton Univ. Press (1957)（原著はドイツ語 (1933)），Dover (1990).

[222] C. Reid, *Hilbert—Courant*, Springer (1986).

[223] R.A. Reiff, *Geschichte der Unendlichen Reihen*, H. Laupp (1889).

[224] P. Ribenboim, *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer (1979). 和訳：吾郷博顕（訳），『フェルマーの最終定理 13 講』，第 2 版，共立出版 (1989).

[225] F. Riesz and B. SZ.-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar (1955). Translated by L.F. Boron.

[226] T.J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Blaisdell (1969), Dover (1981).

[227] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* 3rd ed., McGraw-Hill (1987).

[228] S. Russ, *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, Oxford Univ. Press (2004).

[229] K. Rychlík, *Bernard Borzano's Schriften*, vol. 1, Functionenlehre, Prag, (1930).

[230] H. Sagan, *Space-Filling Curves*, Springer (1994). 和訳：鎌田清一郎（訳），『空間充填曲線とフラクタル』，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).
[231] G. Schubring, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, Springer (2005).
[232] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann (1950). 和訳：岩村聯（訳），『超函数の理論』，岩波書店 (1953).
[233] M. Seltman and R. Goulding, *Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis*, Springer (2007).
[234] K. Shen, J. N. Crossley, & A. W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art; Companion & Commentary*, Oxford Univ. Press (1999).
[235] T. Simpson, *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750).
[236] A. N. Singh, *The Theory and Construction of Non-Differenciable Functions*, in "Squaring the Circle and Other Monographs" E. W. Hobson et al., Chelsea (1953).
[237] D.E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill (1929), Dover (1959).
[238] E. Smith and Y. Mikami, *A History of Japanese Mathematics*, Open Court (1914), Dover (2004).
[239] F. Smithies, *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*, Camb. Univ. Press (1997).
[240] J.A. Stedall, *The Great Invention of Algebra*, Oxford Univ. Press (2003).
[241] J. Stedall, *Mathematics Emerging*, A Sourcebook 1540-1900, Oxford Univ. Press (2008).
[242] J. Stedall, *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a Gap in the History of Algebra*, Euro. Math. Soc. (2011).
[243] S. Stevin, *De Thiende*, Leiden (1585). 仏訳：*La Disme.*
[244] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, 2nd Ed., Springer (2001).
[245] E. Stone, *The Method of Fluxions both Direct and Inverse*, London, (1730).
[246] D.J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 4th. ed., Dover (1987).
[247] D.J. Struik (ed.), *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800, Harverd Univ. Press, (1969).
[248] A. Stubhaug, *Niels Hendrik Abel and his Times*, Springer (2000).
[249] D. Suisky, *Euler as Physicist*, Springer (2009).
[250] J. Szabados and P. Vértesi, *Interpolation of Functions*, World Scientific (1990).
[251] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. (1939).
[252] T. Takagi, *Collected Papers*, eds., S. Iyanaga, K. Iwasawa, K. Kodaira, and K. Yosida, Springer (1990).
[253] Brook Taylor, *Methodus Incrementorum Directa & Inversa.* (1717).
[254] J. Thomae, *Einleitung in die Theorie der Bestimmten Integrale*, L. Nebert (1875).
[255] W. Thomson and P.G. Tait, *Principles of Mechanics and Dynamics*, I & II (1912), Reprint by Dover (2003).
[256] J.-P. Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations*, World Scientific (2001).
[257] I. Todhunter, *A History of the Progress of the Calculus of Variations during the*

Nineteeth Century, Macmillan (1861).

[258] I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theories of Attractions and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace*, Vol. I, Macmillan (1873).

[259] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press (1986).

[260] T.W. Turnbull (ed.), *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, G. Bell & Sons (1939).

[261] O. Vallée and M. Soares, *Airy Functions and Applications to Physics*, 2nd ed. Imperial College Press (2010).

[262] G. van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth, The Early History of Trigonometry*, Priceton Univ. Press (2009).

[263] V. S. Varadarajan, *Euler through Time: A New Look at Old Themes*, Amer. Math. Soc. (2006).

[264] F. Viète, *Opera Mathematica*, G. Olms verlag (1970).

[265] F. Viète, *The Analytic Art*, Dover (2006).

[266] J. Wallis, *The Arithmetic of Infinitesimals*: John Wallis, 1656, J.A. Stedall によるラテン語からの英訳, Springer (2004). ラテン語版は彼の全集（Georeg Olms Verlag (1972)）第 1 巻にある.

[267] F. Waismann, *Introduction to Mathematical Thinking*, Harper and Row (1959).

[268] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Ed., Camb. Univ. Press (1944).

[269] R.S. Westfall, *The Life of Isaac Newton*, Camb. Univ. Press (1994).

[270] D.T. Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol. I (1967)–vol. VIII (1981), Camb. Univ. Press.

[271] N. Wiener, *I Am a Mathematician*, MIT Press (1956).

[272] R. Woddhouse, *A Treatise on Isoperimetrical Problems and the Calculus of Variations* (1810). Reprinted as *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century*, Amer. Math. Soc. (2001).

[273] N. Wiener, *Cybernetics*, 2nd ed., MIT Press (1961). 和訳：池原止戈夫他 3 名（訳），『サイバネティックス』，岩波書店 (1962).

[274] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th Ed., Springer (1980).

[275] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Camb. Univ. Press, vol. I & II (1959).

論文

[276] A. Aaboe, Al-Kāshī's iteration method for the determination of sin 1°, *Scripta Math.*, **20** (1954), 24–29.

[277] N.H. Abel, Untersuchungen über die Reihe: $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 + \ldots\ldots$u.s.w., *J. reine Angew.* Math., **1** (1826), 311-331. これはフランス語からのドイツ語訳. もとの原稿は全集に：Œuvres Complète de Niels Hendrik Abel, vol. 1, (1881), 219–250. 部分的英訳：[91], 68–70, および [237], 286–291.

[278] N.H. Abel, Auflösung einer mechanischen Aufgabe, *J. reine Angewa. Math.*, **1** (1826),

153-157. Œuvres Complète, vol. 1, (1881), 97-101.

[279] P.C. Allaart and K. Kawamura, Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **140**, (2006), 269-295.

[280] P.C. Allaart and K. Kawamura, The improper infinite derivatives of Takagi's nowhere-differentiable function, *J. Math. Anal. Appl.*, **372** (2010), 656-665.

[281] P.C. Allaart and K. Kawamura, The Takagi function: a survey, *Real Analysis Exchange*, **37** (2011/2012), 1-54.

[282] G. Almkvist, B. Berndt, Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipse, π, and the *Ladies Diary, Amer. Math. Month.*, **95**, (1988),585-608.

[283] A.-M. Ampère, Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, at á l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arréte cette série á un terme quelconque, *J. L'Ecole Polytechnique*, **6** (1806), 148-181.

[284] A.M. Ampère, Essay sur nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et du l'interpolation des suites, considérée comme dérivant d'une source commune, *Ann. de Math.*, **16** (1825-26), 329-349.

[285] T. Archibald, Differential equations: A historical overview to circa 1900, in [166], 325-353.

[286] Z.S. Athanassov, Uniqueness and convergence of successive approximations for ordinary differential equations, *Mathematica Japonicae* **35** (1990), 351-367.

[287] R. Ayoub, Euler and the zeta function, *Amer. Math. Month.*, **81** (1974), 1067-1086.

[288] R.G. Ayoub, Partial triumph or total failure? *Math. Intell.*, **7** (1985), 55-58.

[289] R. Ayoub, What is a Napierian Logarithm?, *Amer. Math. Month.*, **100** (1993), 351-364.

[290] 新井仁之（実解析），上野健爾・高橋陽一郎・中島啓（共編），『数学の未解決問題』，サイエンス社. pp. 100-110.

[291] Y. Baba, On Maxima of Takagi-van der Waerden Functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **91** (1984), 373-376.

[292] S. Banach, Sue les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, **3** (1922), 133-181.（これは Banach の学位論文である.）

[293] S. Banach, Über die Baire'sche Kategorie gewisser Functionenmengen, *Studia Math.*, **3** (1931), 174-179.

[294] S. Banach, Sur l'equation fonctionelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$, *Fund. Math.*, **1** (1920), 123-124.

[295] E.G. Begle and W.L. Ayres, On Hildebrandt's example of a function without a finite derivative, *Amer. Math. Month.*, **43** (1936), 294-296.

[296] C. Berezinski, Historical perspective on interpolation, approximation and Quadrature, in *"Handbook of Numerical Analysis, vol. III", eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions*, North-Holland, (1994), 3-46.

[297] Jakob Bernoulli, Analysis problematis antehac propositi, de inventione linea descen-

sus a corpore gravi gravi percurrenda ···, *Acta Eruditorum* (1690), 217-219.

[298] Johann Bernoulli, Principia calculi exponentialium seu percurrentium, *Acta Eruditorum* (1697), 125-138.

[299] Johann Bernoulli, Angulorum arcuumque sectio indefinita, *Acta Eruditorum*, (1712), 274-277, 329-330. [86] の I の 511-514.

[300] Johann Bernoulli, Remarques sur ce qu'un a donné jusqu'ici de solutions des problemes sur les isoparametres, *Histoires l'Academie Royale Sci. Paris*, (1718), 100-123. [86] の II の 235-269.

[301] D. Bernoulli, Explanatio notationum suarum, quae exstant Supplem. Tomo VIII Sect II., *Acta Eruditorum* (1725), 470-475.

[302] D. Bernoulli, Réfléxions et eclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes *Histoire Acad. Royale Sci Belles-Lettres, Berlin* (1753), 147-172.

[303] D. Bernoulli, Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps, *Histoire Acad. Royale Sci Belles-Lettres, Berlin* (1753), 173-195.

[304] D. Bernoulli, De idole singulari serierum infinitarum, quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et vsu, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **17** (1772), 3-23.

[305] S.N. Bernstein, Quelque remarques sur l'interpolation, *Comm. Kharkov Math Soc., Ser. 2*, **15** (1916), 49-61.

[306] S.N. Bernstein, Quelque remarques sur l'interpolation, *Math. Ann.*, **79** (1918), 1-12.

[307] S.N. Bernstein, Démonstration du Théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des Probabilités, *Comm. Soc. Math. Kharkov* **13** (1912/13), 1-2. コピーを取ることは難しい. 幸いなことに `http://www.math.technion.ac.il/hat/` にそのコピーがある.

[308] A. Besicowitch, Discussion der stetigen Funktionenim Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit, *Bull. Acad. Sci. Russie*, **19** (1925), 527-540.

[309] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. London Math. Soc.*, **11** (1979), 268-272.

[310] G. Birkhoff and E. Hreyszig, The establishment of functional analysis, *Hist. Math.*, **11** (1984), 258-321.

[311] L.M. Blumenthal, "A paradox, a paradox, a most ingeniuos paradox", *Amer. Math. Month.*, **47** (1940), 346-353.

[312] R.P. Boas, When is a C^∞ function analytic?, *Math. Intel.*, **11** (1989), 34-37.

[313] E. Borel, Sur quelque points de la théorie des fonctions, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **3** (1895), 9-55.

[314] B. Bolzano, Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössendienen, Prague (1816). [[228] に英訳]

[315] B. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatz, dass Zwischen je Zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Prague (1817). English translation by S.B. Russ, A translation of

Bolzano's paper on the intermediate value theorem, *Historia Math.*, **7** (1980), 156-185, [228] にも英訳あり.

[316] C.B. Boyer, The foremost textbook of modern times, *Amer. Math. Month.*, **58** (1951), 223-226. Also in Proc. Int. Cong. Math., *Amer. Math. Soc.*, (1950), 748.

[317] A. Brown, An elementary example of a continuous singular function, *Amer. Math. Month.*, **75** (1969), 295-297.

[318] A. Burja, Sur le développement des fonctions en séries, *Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, Class Math.* (1801), 3-28.

[319] J.B. Brown and G. Kozlowski, Smooth Interpolation, Hölder Continuity, and the Takagi-van der Waerden Function, *Amer. Math. Month.*, **110** (2003), 142-147.

[320] A.M. Bruckner and J.D. Leonard, Derivatives, *Amer. Math. Month.*, **73** (1966), Number 4 Part II, 24-56.

[321] H. Burkhardt, Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, *Jahresbericht Deutschen Math. Vereinigung*, **10/2** (1908), 1-894.

[322] J. Barrow-Green, From cascades to calculus: Rolle's theorem, *The Oxford Handbook of the History of Mathematics, ed. E. Robson & J. Stedall*, Oxofrd Univ. Press, (2009), 737-754.

[323] K.A. Bush, Continuous functions without derivatives, *Amer. Math. Month.*, **59** (1952), 222-225.

[324] F. Cajori, History of the exponential and logarithmic concepts, *Amer. Math. Month.*, **20** (1913), 5-14; 35-47; 75-84; 107-117; 148-151; 173-182; 205-210.

[325] F. Cajori, Discussion of fluxions: from Berkeley to Woodhouse, *Amer. Math. Month.*, **24** (1917), 145-154.

[326] F. Cajori, Grafting of the theory of limit on the calculus of Leibniz, *Amer. Math. Month.*, **30** (1923), 223-234.

[327] G. Cantor, Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz, *J. reine Angew. Math.*, **72** (1870), 130-138.

[328] G. Cantor, Beweise, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt, *J. reine Angew. Math.*, **72** (1870), 139-142.

[329] G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Ann.*, **5** (1872), 123-132.

[330] G. Cantor, Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen, *Math. Ann.*, **19** (1882), 588-594.

[331] G. Cantor, De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.*, **4** (1884), 381-391.

[332] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.*, **116** (1966), 135-157.

[333] F.S. Cater, Most monotone functions are not singular, *Amer. Math. Month.*, **89** (1982), 47-49.

[334] A.L. Cauchy, Sur le développement des fonctions en séries et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles, *Bull. Soc. Phil.* (1822), 49-54. *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy, Ser. II*, **II**, 276-282.

[335] A.L. Cauchy, Mémoir sur les intégrales définies, *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy, Ser. I*, **I** (1882), 329-506.

[336] A.L. Cauchy, Mémoir sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy, Ser. II*, **XV** (1882), 41-89.

[337] A.L. Cauchy, Mémoire sur les Développements des fonctions en séries périodiques, *Mémoire de l'Academie des Sciences*, **6** (1827). *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy, Ser. I*, **II**, 12-19.

[338] A. Cauchy, Sur les fonctions interpolaires, *C. R. Acad. Sci.*, **11** (1840), 775-789.

[339] A.L. Cauchy, Mémoir sur les fonctions continues, *C. R. Acad. Sci.*, **18** (1844), 116-129. *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy, Ser. I*, **VIII** (1893), 145-160.（146 ページ）

[340] A.-L. Cauchy, Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences, *C. R. Acad. Sci.*, **24** (1847), 1120-1130. *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy, Ser. I*, **X**, 312-323.

[341] A. Cauchy, Mémoire sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus, et sur la théorie des intégrales singuliéres, *Compt. Remdu Séances Acad. Sci.*, **19** (1844),1337-1344.

[342] A.-L. Cauchy, Note sur les série convergentes dont divers termes sont des fonctions continues d'une variable réeles ou imaginaire, entre des limites données, *Compt. Remdu Séances Acad. Sci.*, **36** (1853), 454-. *Œuvres Completes d'Augustin Cauchy, Ser. I*, **XII**, 30-36.

[343] Ch. Cellérier, Note sur les principles fondamentaux de L'analyse, *Bull. Sci. Math.*. **XIV** (1890), 142-160.

[344] J.-.L Chabert, Un demi-siecle de fractales: 1870-1920, *Hist. Math.*, **17** (1990), 339-365.

[345] A. Constantin, On Nagumo's theorem, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **86** (2010), 41-44.

[346] A.D.D. Craik, Geometry versus analysis in early 19th-century Scotland: John Leslie, William Wallace, and Thomas Carlyle, *Hist. Math.*, **27** (2000), 133-163.

[347] A.D.D. Craik, Prehistory of Faà di Bruno's formula, *Amer. Math. Month.*, **112** (2005), 119-130.

[348] A.D.D. Craik, George Gabriel Stokes on Water-Wave Theory, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **37** (2005), 23-42.

[349] J.J. Cross, Integral theorems in Cambridge mathematical physics 1830-55, *Wranglers and Physicists*, ed. P.M. Harman, Manchester Univ. Press (1985), 112-148.

[350] J. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Histoire de l'academie royale des sciences et belles lettres de Berlin*, **3** (1747), 214-219（出版は 1749 年）.

[351] J. d'Alembert, Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise

en vibration, 同上 220-249.

[352] J. d'Alembert, Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration, 同上 **6** (1750), 355-360（出版は 1752 年）.

[353] J. d'Alembert, Extrait de différentes lettres à Mr. de la Grange, 同上 **19**, (1763), 235-255（出版は 1770 年）.

[354] J. d'Alembert, Réflexions sur les suites & sur les racines imaginaires, *Opuscules Math.* **V** 171-215. [241] に部分訳あり.

[355] M.G. Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, Série, 2^e, **4** (1875), 57-112.

[356] M.G. Darboux, Addition du mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, Série, 2^e, **8** (1879), 195-202.

[357] P.J. Davis, Leonhard Euler's integral: a historical profile of the Gamma function", *Amer. Math. Month.* **66** (1959), 849-869.

[358] M. Dehn and E. Hellinger, On James Gregory's *Vera Quadratura*, in [260], 468-478.

[359] M. Dehn and E.D. Hellinger, Certain mathematical achievements of James Gregory, *Amer. Math. Month.* **50** (1943), 149-163.

[360] G. de Rham, Sur un Exemple de Fonction Continue Sans Dérivée, *Extrait de L'Enseignement mathématique*, tome III, fasc.**1** (1957), 714-715.

[361] G. de Rham, Sur quelques courbes definies par des equations fonctionnelles, *Rendi. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino*, **16** (1957), 101-113.

[362] S. Dickstein, Zur Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, **9** (1899), 65-79.

[363] J. Dieudonne, Deux exemples singuliers d'équations différentielles, *Acta Scientiarum Mathematicarum, Pars B*, **12** (1950), 38-40.

[364] P.G.L. Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servant à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. reine Angew. Math.*, **4** (1829), 157-169.

[365] P.G.L. Dirichlet, Über die Darstellung Ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, *G. Lejeune Dirichlet's Werke, Band 1* (1889), pp. 133-160（元々は 1837 年刊）.

[366] A.C. Dixon, Proof that $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, Math. Gaz., **6** (1912), 223-224.

[367] P. du Bois-Reymond, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen, *J. reine Angew. Math.*, **79** (1875), 21-37.

[368] P. du Bois-Reymond, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungs-Formeln, *Bayer.Abhandl*, **12**, Zweite Abtheilung (1876), pp. 1-102. Ostwald's Klassiker, vol. 186. Leipzig, (1913)

[369] P. du Bois-Reymond, Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylorschen Reihenentwickelung, *Math. Ann.*, **21** (1883), 109-117.

[370] J. Dutka, Richardson extrapolation and Romberg integration, *Hist. Math.*, **11** (1984), 3-21.

[371] J. Dutka, On the early history of Bessel functions, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **49** (1995), 105-134.

[372] M.F. Egan, The integrals $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ and $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$, *Math. Gaz.*, **8** (1916), 299-300.

[373] G. Eneström, Remarque sur un théorèms relatif aux racines de l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ où tous les coefficientes a sont réels et potitifs, *Tôhoku Math. J.*, First Series **18** (1920), 34-36.

[374] H.J. Ettlinger, Cauchy's paper of 1814 on definite integrals, *Ann. Math., 2nd Ser.*, **23** (1921-22), 255-270.

[375] L. Euler, De summis serierum reciprocarum, *Opera Omnia*, **I-XIV**, 73-86. [E41]

[376] L. Euler, Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi *Opera Omnia*, **I-XIV**, 101-107. [E46]

[377] L. Euler, Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali *Opera Omnia*, **I-XIV**, 108-123. [E47]

[378] L. Euler, Demonstration de la somme de cette suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc, *Opera Omnia*, **I-XIV**, 177-186. [E63]

[379] L. Euler, Sur la vibration des cordes, *Histoire de l'academie royale des sciences et belles lettres de Berlin*, **4** (1748), 69-85. Opera Omnia, **II-X**, 63-77. [E140]

[380] L. Euler, Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli, *Histoire Acad. Royale Sci Belles-Lettres de Berlin*, (1753), 196-221. *Opera Omnia*, **II-X**, 233-254. [E213]

[381] L. Euler, Exposition de quelques paradoxes dans le calcul integral, Mem. Acad. Sci. Berlin, **12** (1758), 300-321 *Opera Omnia*, **I-XXII**, 214-236. [E236]

[382] L. Euler, Subsidium calculi sinuum, *Opera Omnia*, **I-14**, 542-584. [E246]

[383] L. Euler, Specimen de constructione aequationum differentialium sine indeterminatarum separatione, *Opera Omnia*, **I-XX**, 1-7. [E28]

[384] L. Euler, Nova series infinita maxime convergens perimetrum ellipsis exprimens, *Opera Omnia*, **I-XX**, 357-370. [E448]

[385] L. Euler, De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis, *Opera Omnia*, **I-19**, 1-44. [E656]

[386] L. Euler, De fractionibus continuis dissertatio, *Opera Omnia*, **I-XIV**, 187-216. English translation: *Mathematical Systems Theory*, **4**, (1985) 295-328. [E71]

[387] L. Euler, Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli progredientibus, *Opera Omnia*, **I-XVI**, 333-353. 特に 336 ページ. [E704]

[388] L. Euler, Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}dx(lx)^{m/n}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa, *Opera Omnia*, **I-XVII**, 316-357. [E421]

[389] L. Euler, Exercitationes Analyticae, *Opera Omnia*, **I-XV**, 131-167. [E432]

[390] L. Euleri, De valorius integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorium,（1781 年提出，1794 印刷）, *Opera Omnia*, **I-XIX**, 217-227. [E675]

[391] L. Euleri, Principia motus fluidorum, *Opera Omnia*, **II-XII**, 133-168. [E258]

[392] L. Euler, De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des

nombres negatifs et imaginaires, *Opera Omnia*, **I-XVII**, 195-232. [E168]

[393] L. Euler, Principes généraux du mouvement des fluides, *Opera Omnia*, **II-XII**, 54-91. (1757 年出版) [E226] 英訳が *Physica D* (2008), 1825-1839.

[394] L. Euler, De valoribus, integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum, *Opera Ominia* **I-XIX**, 217-227. [E675]

[395] L. Euler, Elementa calculi variationum, *Opera Omnia* **I-XXV** 141-176. [E296]

[396] L. Euler, De formulis exponentialibus replicatis, *Opera Omnia* **I-XV**, 268 - 297. [E489]

[397] L. Euler, De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet. 1777 年に書かれ，公表は 1794 年. [141] の補遺. *Opera Omnia*: **I-IXX**, pp. 129-140. [E671]

[398] G. Faber, Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differentiierbaren Funktion, *Jahr. Deutschen Math.-Vereinigung*, **16** (1907), 538-540.

[399] G. Faber, Über stetige Funktionen, *Math. Ann.*, **66** (1908), 81-94.

[400] G. Faber, Über stetige Funktionen (Zweite Abhandlung.), *Math. Ann.*, **69** (1910), 372-443.

[401] L. Feigenbaum, Brook Taylor and the method of increments, *Archives History Exact Sci.*, **34** (1985), 1-140.

[402] L. Fejér, Sur les fonctions bornées et intégrables, *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris*, **131** (1900), 984-987.

[403] L. Fejér, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, *Math. Ann.* , **58** (1903), 51-69.

[404] L. Fejér, Eine stetige Funktion deren Fourier'sche Reihe divergiert, *Rend. Circolo Mate. Palermo*, **28** (1909), 402-404.

[405] L. Fejér, Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe, *J. reine Angew. Math.*, **137** (1910), 1-5.

[406] L. Fejer, Lebeguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *J. reine Angew. Math.*, **138** (1910), 22-53.

[407] E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **144**, (1907), 1022-1024.

[408] J.F. Fleron, A note on the history of the Cantor set and Cantor function, *Math. Mag.*, **67** (1994), 136-140.

[409] P. Frankl, M. Matsumoto, I.Z. Ruzsa and N. Tokushige, Minimum shadows in uniform hypergraphs and a generalization of the Takagi function, *J. Combin. Theory Ser. A*, **69** (1995), 125-148.

[410] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendi. *Circolo Mate. Palermo*, **22** (1906), 1-74. 和訳は [55]

[411] M. Fréchet, Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *L'Enseign. Math.*, **15** (1913), 390-393.

[412] R.M. French, The Banach-Tarsky theorem, *Math. Intel.*, **10** (1988), 21-28.

[413] I. Fredholm, Om en speciell klass af singuläre linier, (1890), *Öfversigt af Konglina Svenska Vetenskaps-Akademiens Fřhandlingar Stockholm*, **47** (1890), 131-134.

Œuvres Complétes de Ivar Fredholm, (1955), 1-5.

[414] H. Freudenthal, Did Cauchy plagiarize Bolzano?, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **7** (1971), 375-392.

[415] G. Frobenius, Ueber die Leibnitzswche Reihe, *J. reine Angew. Math.*, **89**, (1880), 262-264.

[416] 藤田宏・長岡亮介，関数，「数学セミナー」，1979 年 5 月号，14-18.

[417] S. Fukuzawa, Erweiterung des Satzes, betreffend die Weierstrasssche Funktionen, *Proc. Tokyo Math.-Phys. Soc.*, **4**, (1907), 202-207.

[418] R.J. Gardner and S. Wagon, At long last, the circle has been squared, *Notice Amer. Math. Soc.*, **36** (1989), 1338-1343.

[419] E. Galois, Notes sur quelques points d'analyse, *Annales de Mathématique pure et Appl.*, **XXI** (1839), 182-184; R. Bourgne J.-P. Azra (ed.), *Écrits et Mémoires Mathémastiques d'Évariste Galois*, (1962), 383-385.

[420] C.F. Gauss, Disquisitiones generalis circa seriem infinitam, $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3$ + etc., *Comm. Soc. Reg. Sci. Gott. Rec.*,**II** (1813); 162. *Werke*, **III** (1866), 123-162.

[421] C.F. Gauss, Darstellung von Diskontinuirlichen Funktioner *Werke*, **X1**, 398-399.

[422] C.F. Gauss, Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secundea, *Werke*, **II**, 93-148.

[423] J. Gerver, The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of π, *Amer. J. Math.*, **XCII** (1970), 33-55.

[424] J.W. Gibbs, Fourier Series. *Nature*, **59** (1898), 200 p. and **59**, (1899), 606 p.

[425] G.A. Gibson, On the history of the Fourier series, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **11** (1893), 137-166.

[426] G. A. Gibson, Taylor's theorem and Bernoulli's theorem: A historical note, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **39** (1920), 25-33.

[427] M. Goar, Olivier and Abel, on series convergence: An episode from early 19th century analysis, *Math. Mag.*, **72** (1999), 347-355.

[428] C. Goffman, Everywhere differentiable functions and the density topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **51**(1975), 250.

[429] J.V. Grabiner, Is mathematical truth time-dependent?, *Amer. Math. Month.*, **81** (1974), 354-365.

[430] J.V. Grabiner, The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass, *Math. Mag.*, **56** (1983), 195-206.

[431] J.V. Grabiner, Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus, *Amer. Math. Month.* **90** (1984), 185-194.

[432] J.V. Grabiner, Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's treatise of fluxions. *Amer. Math. Month.* **104**, (1997), 393-410.

[433] I. Grattan-Guiness, Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early ninteeth century, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **6** (1970), 373-400.

[434] I. Grattan-Guiness, The Cauchy-Stokes-Seidel story on uniform convergence again:

Was there a fourth man?, *Bulletin Société Math. de Belgique*,**38** (1986), 225-235.

[435] A.N. Godunov, A counterexample to Peano's theorem in an infinite-dimensional Hilbert space, Vestnik MGU, Seriya Matem. i Mekhan., vol. 27 No. 5, (1972), pp. 31-34. English Transl., *Moscow Univ. Math. Bull.*, **27 No. 5** (1972), 24-26.

[436] A.N. Godunov, Peano's theorem in Banach spaces, *Func. Anal. and Its Appl.*, **9** (1975), 53-55.

[437] Ch. Gudermann, Theorie der Modular-Functionen und der Modular Integrale, *J. reine Angew. Math.*, **18** (1838), 1-54, 142-175, 220-258.

[438] R.C. Gupta, Bhaskara I's approximation to sine, *Indian J. History Sci.*, **2**, (1967), 121-136.

[439] J. Hamadard, Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable, *Comptes Rendues Séances de l'Acad. Sci.*, **106** (1888), 259-262. *Œuvres de Jacques Hadamard*, **I**, (1968), 3-6.

[440] J. Hadamard, Essai sur l'etude des fonctions données par leur développement de Taylor, *J. Math. Pures Appl.* **8** (1892), 101-186., *Œuvres de Jacques Hadamard*, **I** (1968), 7-92.

[441] J. Hadamard, Sur les deérivées des fonctions de lines, *Bull. Soc. Math. France*, **30** (1902), 40-43.

[442] J. Hadamard, Sur les opérations fonctionnelle, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **136** (1903), 351-353.

[443] J.W. Hagood and B.S. Thomson, Recovering a function from a Dini derivative, *Amer. Math. Month.*, **113** (2006), pp 34-46.

[444] P.R. Halmos, Fourier Series, *Amer. Math. Month.* **85**, (1978), 33-34.

[445] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.*, **60**, (1905), 459-462.

[446] W.R. Hamilton, Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essai on algebra as the science of pure time, *Trans. Irich. Acad.*, **17** (1837), 293-422, *Math. Papers*, **3**, 3-96.

[447] H. Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, Gratulationsprogramm der Tübingen Universität vom 6. März, 1870. *Math. Ann.*, **20** (1882), 63-112. (1870 年に Tübingen 大学で発行されたものの再版). さらに, Ostwald's Klassiker の 153 巻にも.

[448] G.H. Hardy, Oscillating Dirichlet's integrals: An essay in the "infinitärcalcul" of Paul du Bois-Reymond, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **44** (1913), 1-40.

[449] G.H. Hardy, On the summability of Fourier's series, *Proc. Lond. Math. Soc., Ser. (2)*, **12** (1913), 365-372.

[450] G.H. Hardy, Weierstrass's non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 301-325.

[451] G.H. Hardy, Further remarks on the integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, *Math. Gaz.*, **8** (1916), 301-303.

[452] G.H. Hardy, Sir George Stokes and the concept of uniform convergence, *Proc. Camb.*

Phil. Soc. **19** (1918), 148–156.

[453] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Some problems of diophantine approximation. Part II. The trigonometrical series associated with the elliptic θ-functions, *Acta Math.*, **37** (1914), 193–239.

[454] A. Harnack, Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe, *Math. Ann.*, **19** (1882), 235–279. Berichtigung, 524–528.

[455] M. Hata, On Weierstrass's non-differentiable function, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, **307** , (1988), 119–123.

[456] M. Hata, Singularities of the Weierstrass Type Functions, *Journal D'Analyse Mathématique*, **51** (1988), 62–90.

[457] 畑政義，連続性と微分可能性，「数学セミナー」，1989 年 8 月号，54-61.

[458] M. Hata and M. Yamaguti, The Takagi function and its generalization, *Japan J. Appl. Math.*, **1** (1984), 183–199.

[459] G.L. Huxley, The geometrical work of Christopher Wren, *Scripta Math.*, **25** (1960), 201–208.

[460] T. Hayashi, A note on Bhāskara I's rational approximation to sine, *Historia Scientiarum*, **42**, (1991), 45–48.

[461] E. Heine, Ueber trigonomische Reihen, *J. reine Angew. Math.* **71** (1870), 353–365.

[462] E. Heine, Die Elemente der Functionenlehre, *J. reine Angew. Math.* **74** (1872), 172–188.

[463] E. Hewitt and R.E. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **21** (1979), 129–160.

[464] T.H. Hildebrandt, A simple continuous function with a finite deivative at no point, *Amer. Math. Month.*, **40** (1933), 547–548.

[465] E. Hille and J.D. Tamarkin, Remarks on a known example of a monotone function, *Amer. Math. Month.*, **36** (1929), 255–264.

[466] O. Hölder, Ueber den Casus Irreducibilis bei der Gleichung dritten grades, *Math. Ann.*, **38** (1891), 302–312.

[467] R.A. Hunt, On the convergence of Fourier series, in "*Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*", Southern Illinois Univ. Press, ed. D.E. Haimo (1968), 235–255.

[468] A. Hurwitz, Über einen Satz des Herrn Kakeya, *Tôhoku Math. J.*, **4** (1913/14), 89–93,

[469] O.S. Ivashev-Musatov, On continuous functions with no derivatives, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **48** (1993), 53–56.

[470] H.N. Jahnke, Algebraic analysis in the 18th century, [166], 105–136.

[471] S.A. Joffe, Interpolation-formulae and central-difference notation, *Trans. Actuarial Soc. America*, **18** (1917), 72–98.

[472] W.P. Johnson, The curious history of Faà di Bruno's formula, *Amer. Math. Month.*, **109** (2002), 217–234.

[473] C. Jordan, Sur la série de Fourier, C. R. S. Acad. Sci., Paris, **92** (1881), 228–230.

[474] E.B. Jourdain, The theory of functions with Cauchy and Gauß, *Bibliotheca Mathe-*

matica, Ser. 3, **6** (1905), 190–207.

[475] K. Kabaya and M. Iri, Sum of uniformly distributed random variables and a family of nonanalytic C^∞-functions, *Japan J. Appl. Math.*, **4** (1987), 1–22.

[476] K. Kabaya-Imai and M. Iri, On operators defining a family of nonanalytic C^∞-functions, *Japan J. Appl. Math.*, **5** (1988), 333–365.

[477] J.-P. Kahane, Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée, *Enseig. Math.*, **5** (1960), 53–57.

[478] S. Kakeya, On the limit of the roots of an algebraic equation with positive coefficients, *Tôhoku Math. J.*, **2** (1912), 140–142.

[479] S. Kakeya, Notes on theory of functions of real variables, *Tôhoku Math. J.*, **3**, (1913), 137–150.

[480] S. Kakeya, On approximate polynomials, *Tôhoku Math. J.*, **6** (1914/15), 182–186.

[481] P. Kitcher, Fluxions, limits, and infinite littleness. A study of Newton's presentation of the calculus, *Isis* (1973), 33–49.

[482] 笠原皓司, 微分不可能な関数,「数学セミナー」, 1984 年 6 月号, 31–39.

[483] Y. Katznelson and K. Stromberg, Everywhere differentiable, nowhere monotone, functions, *Amer. Math. Month.*, **81** (1974), 349–354.

[484] I. Kleiner, Evolution of the function consept: a brief survey, *College Math. J.*, **20** (1989), 282–300.

[485] I. Kleiner and N. Movshovitz-Hadar, The role of paradoxes in the evolution of mathematics, *Amer. Math. Month.*, **101** (1994), 963–974.

[486] R.A. Knoebel, Exponentials reiterated, *Amer. Math. Month.*, **88** (1981), 235–252.

[487] K. Knopp, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.*, **2** (1918), 1–26.

[488] 小林龍彦, 関孝和の楕円の研究について, 京都大学数理解析研究所講究録, 1064 巻 (1998), 63–74.

[489] K. Kobayashi, On the critical case of Okamoto's continuous non-differentiable functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A* **85**, (2009), 101–104.

[490] A.N. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.*, **4** (1923), 324–328; A Fourier-Lebesgue series divergent almost everywhere, *Selected Works of A.N. Kolmogorov*, **I**, ed. V.M. Tikhmirov, Kluwer Acad. Press (1991), 1-4.

[491] A.N. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 183 (1926), pp. 1327–1328; A Fourier-Lebesgue series divergent everywhere, Selected Works of A.N. Kolmogorov, vol. I, ed. V.M. Tikhmirov, Kluwer Acad. Press (1991), pp. 74-75.

[492] N. Kôno, On generalized Takagi functions, *Acta Math. Hung.* **49** (1987), 315–324.

[493] G. Kowalewski, Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion, *Acta Math.*, **44** (1923), 315–319.

[494] G. Landsberg, Über Differentierbarkeit stetiger Funktionen, *Jahresbericht Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **17** (1908), 46–51.

[495] L.J. Lander and T.R. Parkin, Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 1079.

[496] Luis de La Grange, Recherches sur la nature, et la propagation du son, *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, **1** (1759), 147- (終わりのページは無い). Oeuvre 1 39-148.

[497] J.-L. Lagrange, Œuvres, vol. VII (1877), p. 251.

[498] J.-L. Lagrange, Œuvres, vol. VII (1877), p. 284-286.

[499] R.E. Langer, Fourier's series. the genesis and evolutions of a theory, *Amer. Math. Month.*, **54** (1947), Suppl., 1-86.

[500] P.-S. Laplace, Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris.* (1782), 1-88. Oeuvre de Laplace **X**, 209-291.

[501] P.-S. Laplace, Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, *Œuvre Complète* **12**, 357-412.

[502] M. Lavrentieff, Sur une équation différentielle du premier order, *Math. Z.* **23** (1925), 197-209.

[503] H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, *J. Math. Pure Appl.*, **1**, (1905), 139-216.

[504] H. Lebesgue, Recherches sur la convergence des séries de Fourier, *Math. Ann.*, **61** (1905), 251-280.

[505] H. Lebesgue, L'óeuvre mathématique de Vandermonde, *L'Enseign. Math.*, **1** (1955), 203-223.

[506] D.H. Lehmer, Interesting series involving the central binomial coefficient, *Amer. Math. Month.*, **92** (1985), 449-457.

[507] G. W. Leibniz, Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, *Acta Eruditorum*, **III**, (1684), 467-473. ライプニッツ著作集 [68] の第 2 巻, 296-307.

[508] A.-M. Legendre, コーシー全集の I-I, 321-327.

[509] M. Lerch, Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen, *J. reine Angew. Math.*, **103** (1888), 126-138.

[510] J. Liouville, Chasles 氏の論文への注意 (タイトル無し), Compte Rendu de Séances Acad. Sci., vol. 19 (1844), 1261-1263.

[511] J. Liouville, Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termessont assujettis à satisfaire à une même équation differentielle du second order contenant un paramétre variable, *J. de Math. Pures et Appl.*, **2**, (1837), 16-35. [91] に英訳あり.

[512] R. Lipschitz, De explicatione per series trigonometricas $\cdots$, *J. reine Angew. Math.*, **63** (1864), 296-308. Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions $\cdots$, *Acta Math.*, **36** (1913), 281-295. (仏訳)

[513] R. Lipschitz, Sur la possibilité d'intégre complétement un systéme donné d'équations différentielles, *Bulletin Sciences Mathématiques et Astoronomiques*, **10** (1876),

149-159.
[514] J.A. Lohne, Essays on Thomas Harriot, *Arch. Hist. Eaxct Sci.*, **20** (1979), 189-312.
[515] N. Lusin, Über eine Potenzreihe, *Rend. Circ. Mate. Palermo*, **32** (1911), 386-390.
[516] N. Lusin, Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier, *Comp. Rend. Acad. Sci.*, **156** (1913), 1655-1658.
[517] W. Luther, The differentiability of Fourier gap series and "Riemann's example" of a continuous nondifferentiable function, *J. Appr. Theory*, **48**, (1986), 303-321.
[518] P. Mancosu, The Metaphysics of the calculus: A foundational debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706, *Hist. Math.*, **16** (1989), 224-248.
[519] P. Maritz, The Bolzano House in Prague, *Math. Intell.*, **23**, (2001), 52-55.
[520] J.. McCarthy, An everywhere continuous nowhere differentiable function, *Amer. Math. Month.*, **60** (1953), 709.
[521] D. Menchoff, Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques, *Math. Sbornik*, **9** (1941), 667-692.
[522] E. Meijering, A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing, *Proc. IEEE*, **90** (2002), 319-342.
[523] Ch. Méray, Observations sur la légitimité de l'interpolation, *Ann. Sci. l'École Norm. Sup.*, **1** (Ser 3) (1884), 165-176.
[524] Ch. Méray, Nouveaux exemples d'interpolations illusoire, *Bull. Sci. Math.*, **20** (1896), 266-270.
[525] M.D. Meyerson, Every power series is a Taylor series, *Amer. Math. Month.*, **88** (1981), 51-52.
[526] マイケルソン，ラブ，ギブズの論争は雑誌 Nature の 1898 年から 1899 年にかけて順次掲載されている．それらは，マイケルソン，Naturee 58 巻 (1898)545 ページ．ラブ，同 569-570 ページ．マイケルソン，59 巻 (1898)，200 ページ．ギブズ，同巻同ページ．ラブ，同巻 200-201 ページ．ギブズ 同巻 606 ページ．
[527] G. Mie, Beweis der Integrirbarkeit gewöhnlisher Differentialgleichungs-systeme nach Peano, *Math. Ann.*, **43** (1893), 553-568.
[528] R.M. Milne, Extension of Huygens' approximation to a circular arc, *Math. Gaz.* **2** (1903), 309-311.
[529] G. Mittag-Leffler, Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm, *Acta Math.*, **15**, (1891), 279-280.
[530] A.F. Monna, The concept of function in the 19^{th} and 20^{th} centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **9** (1972), 57-84.
[531] G. Morera, Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa, *Rend. Reale Instituto Lombardo di Scienze e Lettere, Series II*, **19**, (1886), 304-307.
[532] D. Morgenstein, Unendlich oft differenzierbare nicht-analytische Funktionen, *Math. Nach.*, **12** (1954), 74.
[533] A.P. Morse, A continuous function with no unilateral derivatives, *Trans. Amer. Math.*

Soc., **44**, (1938), 496-507.

[534] E.H. Moore, On Certain Crinkly Curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **1** (1900), 72-90.

[535] 長岡亮介，ニュートンの数学，[67] の 107-146 ページ．

[536] 長岡亮介，現代数学史のひとこま．複素関数論の誕生/発見と論証の方法としての代数的形式主義 上下，「数学セミナー」(1986)，6 月号の 64-70, 8 月号の 70-75.

[537] 長岡亮介，18 世紀数学史への視点—「谷間の時代」の「豊かさ」について，数理解析研究所講究録 1444 巻 (2005)，145-152.

[538] M. Nagumo, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, *Japanese J. Math.* **3** (1926), 107-112.

[539] M. Nagumo, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von gwöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, *Japanese J. Math.* **4** (1927), 307-309.

[540] E. Neuenschwander, Riemann's example of a continuous, 'nondifferentiable' function, *Math. Intel.*, **1** (1978), 40-44.

[541] 西村重人，[熱の解析的理論]：Fourier 展開公式と Fourier 積分公式：その Fourier 自身による証明，京都大学数理解析研究所講究録，**1257** (2002), 76-87.

[542] 西村重人，フーリエの生涯と熱伝導の研究，京都大学数理解析研究所講究録，**1583** (2008), 220-231.

[543] Y. Okada, On approximate polynomials, with integral coefficients only, *Tôhoku Math. J.*, **23** (1923), 26-35.

[544] H. Okamoto, A remark on continuous, nowhere differentiable functions, *Proc. Japan Acad.*, **81**, (2005), 47-50.

[545] 岡本久，知られざるグリーン，「数学セミナー」，2003 年 7 月号，45-49.

[546] 岡本久，ニュートン法の話，「数学のたのしみ」，2006 年春号，70-91.

[547] L. Olivier, Remarques sur les séries infinies et leur convergence, *J. reine Angew. Math.*. **2** (1827), 31-44.

[548] `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/profile-j.html`

[549] W.F. Osgood, Non-uniform convergence and the integration of series term by term, *Amer. J. Math.*, **19** (1897), 155-190.

[550] W.F. Osgood, Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **9** (1898), 331-345.

[551] P. Painlevé, Gewöhnliche differentialgleichungen; existenz der lösungen, in *Encyklopädie der Math. Wissen.*, (1899-1916), Vol. II A 4a, 189-229.

[552] G. Peano, Opere Scelte, vol. 1 (1957), p. 53.

[553] G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziani di primo ordine, *Atti della Reale Accad. Scienze di Torino*, **11** (1886), 677-685. Opere Scelte, vol. 1 (1957), 74-81. 英訳が [215], 51-57 ページにあり．

[554] G. Peano, Démonstration de l'intǵrabilité des équations différentielles ordinaires, *Math. Ann.*, **37** (1890), 182-228. Opere Scelte, vol. 1 (1957), 119-170.

[555] G. Peano, Sur une formule d'approximation pour la rectification de l'ellipse, *Comptes Rendus Séances Acad. Sci., Paris,* **109** (1889), 960-961. G. Peano, Opere Scelte,

vol. 1 (1957), 100-101.

[556] E.D. Pepper, On continuous functions without derivative, *Fund. Math.*, **12** (1928), 244-253.

[557] F.W. Perkins, An elementary example of a continuous non-differentiable functions, *Amer. Math. Month.*, **34** (1927), 476-478.

[558] T. Perl, The Ladies' Diary or Woman's Almanack, 1704-1841, *Hist. Math.*, **6** (1979), 36-53.

[559] O. Perron, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, *Math. Z.*, **28** (1928), 216-219.

[560] E. Picard, Mémoir sur la théorie des équations aux dérivées partielles at la méthode des approximations successives, *J. Math. Pures Appl.*, 4 ser. **6** (1890), 145-210.

[561] E. Picard, Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires, *Nouvelles Annal. Math.*, **10** (1891), 197-201.

[562] D. Poisson, Mémoire sur les intégrales définies, *J. École Polytechnique*, **9** (1813), 215-246.

[563] D. Poisson, Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries, *J. École Polytechnique*, **12** (1823), 404-509.

[564] M.B. Porter, Derivativeless continuous functions, Bull. Amer. *Math. Soc.* , **25** (1919), 176-180.

[565] A. Pringsheim, Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich, *Math. Ann.*, **42** (1893), 153-184.

[566] A. Pringsheim, Grundlagen der Allgemainen Funktionenlehre, *Encyklopädie Math. Wissen.*, II A1, (1899-1916), 1-53.

[567] A. Pringsheim, Zur Geschichte des Taylorchen Lehrsatzes, *Bibliotheca Math.*, **I** (1900), 433-479.

[568] S. Ramanujan, Modular equations and approximations to π, *Quart. J. Math.*, **45** (1914), 350-372.

[569] J.R. Ravetz and I. Grattan-Guinness, Fourier, Jean Baptiste Joseph, *Dictionary of Scientific Biography.*

[570] F. Riahi, An early iterative method for the determination of $\sin 1^\circ$, *College Math. J.*, **26** (1995), 16-21.

[571] J. Riccati, Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus, *Acta Eruditorum* , **Supp. VIII** (1724), 66-73.

[572] L.F. Richardson, The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry Dam, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A 210** (1911), 307-357.

[573] V.F. Ricky and P.M. Tuchinsky, An application of geography to mathematics: History of the integral of the Secant, *Math. Mag.* **53** (1980), 162-166.

[574] B. Riemann, Über Die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Abhand. Kön. Gesel. Wissen. Göttingen*, **13** (1867). 87-131. B. Riemann, Gesamte Math. Werke, Springer & Teubner (1990). 259-303. 和訳. [71] の 6 章.

[575] F. Riesz, Sur les systemes orthogonaux de fonctions, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **144**, (1907), 615-619.

[576] W. Romberg, Vereinfachte numerische integration, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlingar*, **28**, Nr. 7 (1955), 30-36.

[577] A. Rosenblatt, Über die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Arkiv Matematik, Astronomi, Fysik*, **5** No. 2 (1909), 1-4.

[578] C. Runge, Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten, *Zeitschrift Math. Phys.*, **46** (1901), 224-243.

[579] P. Rusnock and A. Kerr-Lawson, Bolzano and uniform continuity, *Hist. Math.*, **32** (2005), 303-311.

[580] S. Russ, Bolzano's analytic programme, *Math. Intel.*, **14**, (1992), 45-53.

[581] D. Rüthing, Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki, *Math. Intell.* **6:4** (1984), 72-77.

[582] R. Salem, On some singular monotonic functions which are strictly increasing, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 427-439.

[583] H. Salzmann and K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.*, **62** (1955), 354-367.

[584] S. Saks, Sur les nombres dérivés des fonctions, *Fund. Math.*, **5** (1924), 98-104.

[585] S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fund. Math.*, **19** (1932), 211-219.

[586] Ph. L. Seidel, Note über eine Eigenshaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen, *Abhandl. Math. Phys. Klasse Kön. Bayerischen Akad. Wiss.* **VII** (1847), 381-394. Ostwald's Klassiker der exacten Wissenshaften, no. 116 に採録.

[587] E.E. Scheufens, From Fourier series to rapidly convergent series for Zeta(3), *Math. Mag.* **84** (2011), 26-32.

[588] H.A. Schwarz, Beispiel einer stetigen nicht differentiirbaren Function, *Verhand. Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*, **56** (1873), 252-258. *Gesammelte Math. Abhandlungen*, **2** (1890), 269-274.

[589] S.L. Segal, Riemann's example of a continuous "nondifferentiable" function continued, *Math. Intel.*, **1** (1978), 81-82.

[590] A. Shidfar and K. Sabetfakhri, On the continuity of van der Waerden's function in the Hörder's sense, *Amer. Math. Month.*, **93** (1986), 375-376.

[591] S.A. Shirali, The Bhaskara-Aryabhata Approximation to the Sine Function, *Math. Mag.*, **84** (2011), 98-107.

[592] S.A. Shkarin, Peano's theorem fails for infinite dimensional Fréchet spaces, *Func. Anal. and Its Appl.*, **27** (1993), 149-151.

[593] W. Sierpiński, Un exemple élémentaire d'une fonction croissante qui a presque partout une dérivée nulle, *Giornale di Matematiche di Battaglini (3)*, **6** (1916), 314-334. *Oeuvres Choisies*, **II** (1975), 122-140.

[594] W. Sierpiński, Sur l'equation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Funda. Math.*, **1** (1920), 116-122. *Oeuvres Choisies*, **II** (1975), 331-336.

[595] H.J.S. Smith, On the integration of discontinuous functions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **6** (1874/75), 140-153.

[596] A. Smith, The differentiability of Riemann's function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **34** (1972), 463-468.

[597] S. Sobolev, Méthode nouvelle à résoudre le probléme de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Math. Sbornik*, **1** (1936), 39-72.

[598] H. M. Srivastava, Some families of rapidly convergent series representations for the zeta functions, *Taiwanese J. Math.*, **4**, (2000), 569-598.

[599] H. Steinhaus, On a certain divergent trigonometric series, *Selected Papers, PWN Polish Scietific Publishers*, (1985), 109-112. (1912年にポーランド語で書かれた論文の英語訳).

[600] E. Steinitz, Stetigkeit und Differentialquotient, *Math. Ann.*, **52** (1899), 58-69.

[601] G.G. Stokes, On the critical values of the sums of periodic series, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **8** (1947), 533-583. *Mathematical and Physical Papers*, vol. 1, 236-313.

[602] M. Sugihara, Some remarks on the Lagrange interpolation with equidistant nodes, *Japan J. Indus. Appl. Math.* **2** (1985), 273-284.

[603] W.C. Swift, Simple constructions of nondifferentiable functions and space-filling curves, *Amer. Math. Month.*, **68** (1961), 653-655.

[604] T. Takagi, 誘導函数ヲ有セザル連續函数ノ簡單ナル例, A simple example of the continuous function without derivative, *Tōkyō Sūgaku-Buturigakkai Hōkoku*, **1** (1903), 176-177. *The Collected Papers of Teiji Takagi*, Iwanami Shoten, (1973), 5-6. Second Ed. by Springer, in 1990.

[605] 高瀬正仁, マルキ・ド・ロピタルの微分計算, 京都大学数理解析研究所講究録, **1444** (2005), 116-123.

[606] 高瀬正仁, フーリエの熱の解析的理論に見る微積分の基本定理, 京都大学数理解析研究所講究録, **1546** (2007), 41-54.

[607] J. Tamarkine, Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielle ordinaires, *Math. Z.* **16** (1923), 207-213.

[608] W. Thomson, On Fourier's expansions of functions in trigonometric series, *Cambridge Math. J.* **II** (1841), Math. and Phys. Papers, vol. 1, 1-6.

[609] C.A. Truesdell, Rational Fluid Mechanics 1687-1765, *Euler Opera Omnia*, **II-XII**, (1954).

[610] C.A. Truesdell, Editor's Introduction, *Euler Opera Omnia*, **II-XIII** (1955).

[611] C. Truesdell, The Rational Mechanics of Flexible or Erastic Bodies 1638-1788, *Euler Opera Omnia*, **II-XI-2**, (1960).

[612] C. Truesdell, The new Bernoulli edition, *Isis*, **49** (1958), 54-62.

[613] A, van der Poorten, A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$, *Math. Intell.*, **1** (1979), 195-203.

[614] B.L. van der Waerden, Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion, *Math. Z.*, **32** (1930), 474-475.

[615] M.H.P.M. van Putten, A Riemann sum upper bound in the Riemann-Lebesgue the-

orem, *SIAM Review*, **40** (1998), 333-334

[616] B. van Rootselaar, Bolzano, Bernard, in *Dictionary of Scientific Biography*, **II**, ed. C.C. Gillispie, Scribner (1970), 273-279.

[617] P.L. Ul'yanov, Luzin's work on the metric theory of functions *Russ. Math. Surv.*, 40:3 (1985), 15-77.

[618] J. van Yzeren, Moivre's and Fresnel's integrals by simple integration, *Amer. Math. Month.*, **86** (1979), 691-693.

[619] K. Volkert, Die Geschichte der pathologoschen Funktionen — Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **37** (1987), 193-232.

[620] K. Volkert, Zur Differenzierbarkeit stetiger Funktionen — Ampere's Beweis und seine Folgen, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **40** (1989), 37-112.

[621] V. Volterra, Sui principii del calcolo integrale, *Giorn. Mat.*, **19** (1881), 333-372. *Opere Matematiche*, vol. 1 (1954), 16-48.

[622] E. Waring, Problems concerning interpolations, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **69** (1779), 59-67.

[623] K. Weierstrass, Zur theorem der Potenzreihen, *Mathematische Werke* I, 67-74.（1841年に書かれた.）

[624] K. Weierstrass, Über continuirlische Functionen eines reellen Arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Königl. Akad. Wissen.*, (1872), *Mathematische Werke* II, 71-74. [英訳]：G.A. Edgar 編, Classics on Fractals, Westview Press, (2004), 3-7.

[625] K. Weierstrass, Über die Analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente, *Sitzungsbericht Königl. Akad. Wissen.*, (1885), 633-639; 789-805, *Mathematische Werke* III, 1-37.

[626] K. Weierstrass, Briefe von K. Weierstrass an Paul du Bois-Reymond, *Acta Math.*, **39** (1923), 199-225. x

[627] C.E. Weil, On nowhere monotone functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **56**, (1976), 388-389.

[628] C. Wessel, Essai sur la répresentation analytique de la direction, Copenhagen, in [237].

[629] C. Wiener, Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstrassschen Function, *J. reine Angew. Math.*, **90** (1881), 221-252.

[630] H. Wilbraham, On a certain periodic function, *Camb. Dublin Math. J.*, **3** (1848), 198-201.

[631] A. Wintner, On the local uniqueness of the initial value problem of the differential equation $d^n x/dt^n = f(t,x)$, *Boll. Unione Mate. Italiana* **9** (1956), 496-498.

[632] E.A. Whitman, Some historical note on the cycloid, *Amer. Math. Month.* **50** (1943), 309-315.

[633] J.A. Yorke, A continuous differential equations in Hilbert space without existence, *Func. Ekvac.*, **13** (1970), 19-21.

[634] W.H. Young, On the derivates of non-differentiable functions, *Messenger Math.* , **38**

(1908), 65-69.

[635] G.C. Young, On inifinite derivatives, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **47** (1916), 127-175.

[636] A.P. Youschkevitch, The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, *Arch. History Exact Sci.*, **16** (1976), 35-85.

[637] T. Zamfirescu, Most monotone functions are singular, *Amer. Math. Month.*, **88** (1981), 47-49.

[638] P. Mancosu and E. Vailati, Torricelli's infinitely long solid and its philosophical reception in the seventeeth century, *Isis*, **82** (1991),50-70.

あとがき

病的なほどの関数に対する著者のスタンスはおわかりいただけると思う．我々はポアンカレやエルミートのようにこれらを毛嫌いすることはない．C^1 級の関数あるいは C^ω 級の関数だけで十分であると言い切ることはできない．たとえば，フラクタルのようなものには微分不可能性を許容した理論が必要になる．数学者というのは他の分野の研究者から様々な相談を受けるものである．そういったときにどのような質問であっても対応できなければならない．たとえて言えば薬屋のような役割を果たす必要がある．薬屋はありとあらゆる種類の薬を用意してなければならない．大多数の人々が風邪薬しか買わないからといって，風邪薬しかおいていない薬屋は本当の薬屋ではない．

解析学の歴史は長いから，多くの良書が書かれている．たとえばボッタツィーニ [96] は定評のあるものである．また，いささか専門的ではあるがメドヴェージェフ [205] やハラジシビリ [175] は本書を書くに際し，非常に参考になることが多かった．解析学を歴史的に学ぶことができるエドワーズ [136] とハイラー&ワンナー [156] も得難い好著であり，本書執筆の際に強い刺激を受けた．ボイヤー [97] も定評のある歴史書であるが，いかんせん読みにくいし，文献の参照が不十分なところもあるので専門家以外の人にはお薦めできない．中根 [42] は他にない特徴をそろえており一読をお勧めする．数学全般の歴史については [153, 41, 246] を参考にした．本書の著者はグラビナー女史の著作から大きな影響を受けた．彼女の [429–432] の影響は本書に歴然としていることがわかるであろう．その著書 [150, 151] は本書の読者にも是非一読されることをお勧めする．解析学と力学は不可分のものとも言えるから，科学史についても一緒に勉強できるとよい．力学に関するものとして [62, 63, 64] はすばらしい内容で，著者も大きな影響を受けた．

オイラーの著作はほとんどラテン語で書かれており，その知識がないと読みづらいのは事実であるが，彼の書いたものはほとんどの場合に理路整然としているので，辞書で単語の意味を調べればオイラーの意図は概ね理解可能である．高瀬正仁 [33] はオイラーの解析学の息吹がわかるような成書であり，大変面白い書物である．必ずしも 100% 賛成するわけではないが，同氏の [34] も多くの示唆を与えてくれる．

本書には著者の気づかない欠点が多いものと覚悟している．もし次の印刷の機会

があれば修正したいと念願している．すでに我々が気づいている多くの欠点のうち最大のものは複素関数論について言及が中途半端なことであろう．複素数およびその関数が「いかがわしいもの」から市民権を得てさらにはひとつの花形になってゆく課程は興味の尽きないストーリーに満ちている．しかし，現状ではこの仕事も将来に委託するしかない．本書でも述べたように，関数の歴史の中で偏微分方程式，特に，弦の振動方程式 $u_{tt} = u_{xx}$ と熱伝導方程式 $u_t = u_{xx}$ が果たした役割は極めて大きい．従って，偏微分方程式の歴史についてもっと語りたかったのであるが，力及ばずそれを実行できなかった．将来誰かが，関数の歴史と偏微分方程式の関係（そこでは超関数が主役の一人となる）を明らかにしてくれることを望む．リュッツエン [199] は確かに示唆に富むが，20 世紀の偏微分方程式論の進歩はあまりに大きく，彼の本だけで十分とは言えない．もどかしい気分であるが，ここで本書を終わりたい．

岡本　久
長岡亮介

索 引

著者略歴

岡本 久（おかもと ひさし）

1956年生まれ
1981年　東京大学理学系研究科修士課程修了
1985年　理学博士
現　在　京都大学教授

主な著書

『非線形力学』（共著）（岩波書店，1995年）
『関数解析』（共著）（岩波書店，1997年）
The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves (World Scientific，2001年)
『ナヴィエーストークス方程式の数理』（東京大学出版会，2009年）

長岡亮介（ながおか りょうすけ）

1947年生まれ
1977年　東京大学大学院理学研究科満期退学
　　　　津田塾大学助教授，大東文化大学教授，放送大学教授等を経て，
現　在　明治大学特任教授

主な著書

『長岡亮介 線型代数入門講義』（東京図書，2010年）
『数学者の哲学＋哲学者の数学』（共著）（東京図書，2011年）
『東大の数学入試問題を楽しむ』（日本評論社，2013年）
『数学再入門』（日本評論社，2014年）

関数とは何か
近代数学史からのアプローチ

2014年7月31日　初版第1刷発行
2014年9月30日　初版第2刷発行

著　者　岡　本　　久
　　　　長　岡　亮　介
発行者　小　山　　透

発行所　株式会社 近代科学社

〒162-0843 東京都新宿区市谷田町 2-7-15
電話 03-3260-6161 振替 00160-5-7625
http://www.kindaikagaku.co.jp

大日本法令印刷　　ISBN978-4-7649-0459-0

定価はカバーに表示してあります.